Национальная академия наук Украины
Институт математики

А.К. Бахтин,
Г.П. Бахтина,
Ю.Б. Зелинский

# ТОПОЛОГО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

Киев — 2008

УДК 517.5:514.17:519:513.83

**Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе** / Бахтин А.К., Бахтина Г.П., Зелинский Ю.Б. // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 73. — 308 с.

Монография посвящена исследованию ряда задач комплексного анализа, которые наглядно показывают силу геометрических и топологических методов. Предназначена для специалистов по комплексному анализу, геометрии и топологии, а также для аспирантов и студентов старших курсов вузов.

**Ответственный редактор:**
член-корреспондент НАН Украины Ю.Ю. Трохимчук

**Рецензенты**:
член-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук,
профессор В.В. Шарко
доктор физ.-мат. наук, профессор И.А. Шевчук

*Утверждено к печати ученым советом*
*Института математики НАН Украины*

**ISBN 966-02-2571-7**
**ISBN 978-966-02-4763-5**

**А.К. Бахтин**

**Г.П. Бахтина**
**Ю.Б. Зелинский**

# ТОПОЛОГО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

# ПРАЦІ
# Інституту математики НАН України

## Математика та її застосування
## Том 73

Засновано в 1994 році

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ОТ РЕДАКТОРА

В монографии исследуются задачи комплексного анализа, решение которых наиболее эффективно получается посредством применения геометрических и топологических методов в совокупности. Затронутая в книге проблематика связывает в один узел проблемы комплексного анализа, геометрии и топологии.

Первый цикл рассматриваемых задач — это вопросы, связанные с далеко идущими обобщениями классического "принципа граничного соответствия". Полученные здесь результаты, благодаря методу, позволяют, не ограничиваясь плоским случаем и аналитическими функциями, получить общие утверждения об отображениях внутренностей областей при некоторых, по возможности минимальных, условиях на границе.

Вторая часть посвящена исследованию задач геометрической теории функций комплексного переменного. В частности, на основе метода разделяющего преобразования предлагаются новые подходы к исследованию задач о неналегающих областях, что позволило значительно обобщить и усилить ранее известные результаты. Этим вопросам посвящены главы со второй по пятую.

В монографии исследуются проблемы, которые представляют научные интересы авторов. Но разработанные в ней понятия и методы позволяют ставить вопрос о решении многих других задач комплексного анализа и применении геометрических и топологических методов в анализе. В книге приведены наиболее интересные, с точки зрения авторов, нерешенные до настоящего времени задачи, представляющие широкую базу и источник тем для дипломных и диссертационных работ.

*Ю.Ю. Трохимчук*, доктор физико–математических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Украины, главный научный сотрудник отдела комплексного анализа и теории потенциала Института математики Национальной академии наук Украины.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Приводимые в монографии результаты не претендуют на полное освещение возможностей геометрических и топологических методов в комплексном анализе. Они отражают отношение авторов к геометрическому подходу к вопросам анализа и в подавляющем большинстве основаны на результатах их собственных научных исследований. Результаты других авторов, которые здесь приводятся, привлечены для придания предмету исследования определенной завершенности, хотя, как видно из текста, затронутая тема еще очень далека от того, чтобы утверждать, что в ней решены все основные проблемы. Авторы надеются, что монография послужит толчком для привлечения молодых исследователей к интересной развивающейся тематике, в которой эффективно используются методы комплексного анализа, геометрии и топологии.

Книга может использоваться и как пособие, и даже просто как справочник. В первом случае, при последовательном чтении — это введение в предмет, во втором — это возможность выборочного знакомства с результатами и нерешенными проблемами данной тематики, в частности, с применениями геометрических и топологических методов в комплексном анализе.

Перейдем к краткому содержанию работы и порядку ее изучения.

Цикл вопросов, которые здесь излагаются, можно разбить на две части: первая посвящена задачам, связанных с обобщениями "принципа граничного соответствия", вторая — вопросы геометрической теории функций.

В связи с этим, в зависимости от интересов читателя, возможны различные подходы к изучению этой книги. Если, например, читателя больше привлекают исследования кратности отображения, то ему будут более интересны первые шесть параграфов первой главы. История возникновения и решения излагаемых задач приводится в разделе 1.7, поэтому во введении уделим больше внимания связи между утверждениями и конспективном обзоре содержания. Читатель, которому более близки вопросы исследования геометрической теории функций комплексного переменного, может сразу переходить ко второй главе.

Первая серия проблем изложена в написанной Ю.Б. Зелинским первой главе, которая посвящена исследованию существования кратных точек при отображении областей, если известно поведение ограничения отображения на границу или ее часть. Первый параграф носит вспомогательный характер. В нем приводятся основные определения класса отображений и степени отображения, используемые в первой главе. Во втором параграфе вводится понятие локальной степени отображения, которое является одним из основных в первой главе, приводятся критерии ее существования. Применение локальной степени отображения позволяет в третьем параграфе установить ряд теорем о стирании особенностей непрерывных функций и критерий монотонности отображения при наличии плотного множества точек, имеющих связные прообразы. В четвертом параграфе изучаются минимальные условия на поведение ограничения отображения на границу области, которые позволяют судить о монотонности отображения внутри области, а в случае нульмерного внутри области отображения дают общие принципы граничного соответствия. В пятом параграфе строятся примеры, показывающие существенность тех ограничений, которые накладываются в предыдущих исследованиях. В частности показано, что классический принцип граничного соответствия перестает быть верным для областей, граница которых отлична от жордановой кривой. Шестой параграф посвящен решению некоторых проблем кратности отображения областей, некоторые из которых поставлены польским математиком А. Косинским в 1957 году [309].

Вторая часть данной монографии посвящена разработке методов решения задач геометрической теории функций комплексного переменного. Основное внимание здесь уделено дальнейшему развитию известного направления геометрической теории функций комплексного переменного, а именно, экстремальным задачам о неналегающих областях (вторая — пятая главы).

Основными объектами исследования являются функционалы, заданные либо на классах однолистных функций, либо на классах открытых множеств расширенной комплексной плоскости. В монографии излагаются новые подходы (в частности, метод "управляющих" функционалов), которые позволяют получить полное решение некоторых классов достаточно общих задач, обобщают и, в ряде случаев, усиливают ранее известные результаты.

В книге представлена результативность системного использования методов разделяющего преобразования, вариационных, квадратичных дифференциалов, симметризации, теории потенциалов при решении новых классов экстремальных задач. Главы 2 — 5 написаны Бахтиным А.К. и Бахтиной Г.П. на основе авторских, а также совместно полученных результатов.

Данная работа не является полным обзором по проблемам геометрической теории функций комплексной переменной. Для ознакомления со всем богатством идей, методов и результатов геометрической теории следует обратиться к фундаментальным монографиям и обзорам: Голузин Г.М. [94], Дженкинс Дж. [104], Хейман В.К. [229], Лебедев Н.А. [162], Милин И.М. [169], Шеффер А.С. и Спенсер Д.С. [338], Кузьмина Г.В. [145], Дубинин В.Н. [110], Дюрен П. [276], Александров И.А. [2], Солынин А.Ю. [201], Васильев А.Ю. [350].

Написание настоящей книги стало возможным благодаря активной поддержке членов семинара по комплексному анализу Института математики НАН Украины. Всем им, принявшим активное участие в обсуждении многих рассмотренных в книге результатов, авторы выражают сердечную признательность.

Авторы.

# ГЛАВА 1

# НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Основная цель настоящей главы — найти такие минимальные условия, накладываемые на поведение отображения на границе плоской области, обеспечивающие однолистность отображения внутри области. Методы, которые для этого применяются, позволяют рассмотреть более общую ситуацию. А именно, мы не будем ограничиваться плоским случаем, и изучим поставленный вопрос относительно областей $n$-мерного евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ или же $n$-мерного многообразия.

Для понимания этой главы необходимо владеть некоторыми понятиями общей и алгебраической топологии, в частности, такими как: локально компактное пространство, $n$-мерное многообразие, ориентируемое многообразие, группа когомологий (с компактными носителями) с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}$ целых чисел или группе $Z_2$ вычетов по модулю 2, точные последовательности групп.

## 1.1 Основные понятия

Пусть $M^n$ и $N^n$ — $n$-мерные многообразия. Под областью $D \subset M^n$ будем понимать открытое связное подмножество $M^n$. Случаи, когда на $M^n$ и $N^n$ накладываются дополнительные ограничения, будут особо оговариваться.

Если $X$ — локально компактное пространство, то пусть $H_c^i(X)$ — его $i$-я группа когомологий с компактными носителями, с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}$ целых чисел [202].

Если $M^n$ — ориентируемое $n$-мерное многообразие, то $H_c^n(M^n) = \mathbb{Z}$. Ориентируемое многообразие с выбранной образующей $\eta^n\left(M^n\right)$ группы $H_c^n\left(M^n\right)$ называется ориентированным. Если $M^n$ — ориентированное многообразие, а $D$ — область в $M^n$, то известно, что канонический гомоморфизм $j : H_c^n\left(D\right) \to H_c^n\left(M^n\right)$ будем изоморфизмом. Положив $\eta^n\left(D\right) = j\eta^n\left(M^n\right)$, получим ориентацию произвольной области в $M^n$. В дальнейшем все многообразия предполагаются ориентированными.

**1.1.1. Определение.** *Если $X$ и $Y$ — локально компактные пространства, то отображение $f : X \to Y$ называется собственным,* *если прообраз произвольного компакта, принадлежащего $Y$, есть компакт в $X$.*

**1.1.2.** Если $f : M^n \to N^n$ — собственное отображение и $\varphi = f\Big|_D : D \to N^n$, то для произвольной точки $y \in N^n \setminus \varphi(\partial D)$ можно определить степень отображения следующим образом. Выберем некоторую открытую окрестность $U(y)$ точки $y$ такую, что $\varphi(\partial D) \cap U(y) = \varnothing$. Существует такое целое $k$, что $j\varphi^*\left(\eta^n(U)\right) = k\eta^n(D)$, где $j : H_c^n\left(\varphi^{-1}U\right) \to H_c^n(D)$ — канонический гомоморфизм, а $\varphi^* : H_c^n(U) \to H_c^n\left(\varphi^{-1}U\right)$ индуцировано отображением $\varphi$. Известно, что $k$ не зависит от выбора $U(y)$. В дальнейшем это число будем обозначать через $\gamma(D, f, y)$. Известно, что $\gamma\left(M^n, f, y\right)$ — постоянно для всех $y \in N^n$, а также, если $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то

**1.1.3.** $\gamma\left(\bigcup\limits_i D_i, f, y\right) = \sum\limits_i \gamma\left(D_i, f, y\right)$ (так называемый "принцип аргумента").

## 1.2 Локальная степень отображения

**1.2.1.** Будем изучать локальное поведение отображения $f : M^n \to N^n$, а поэтому достаточно считать, что имеем отображение области $D \subset M^n$ в область $D_1 \subset N^n$. Для каждой точки $y \in D_1$ прообраз $f^{-1}(y)$ при собственном отображении $f : D \to D_1$ распадается на компактные компоненты. Каждую из компонент $f^{-1}(y)$ будем называть континуумом отображения.

Любая окрестность континуума отображения $c \subset f^{-1}(y)$ содержит открыто-компактную порцию $Q$ множества $f^{-1}(y)$, содержащую $c$. Известно, что собственное отображение замкнуто, т.е. образ замкнутого множества замкнут. В силу замкнутости отображения $f$ и компактности $Q$ найдется открытая окрестность $U(y) \subset D_1$ точки $y = f(c)$ такая, что любая компонента $V_i$, $1 \leq i \leq i_0$, прообраза $f^{-1}(y)$, пересекающая компакт $Q$, не пересекает $f^{-1}f(c) \setminus Q$, и ее замыкание $\overline{V_i}$ компактно и лежит в $D$. Это следует из известных теорем для замкнутых отображений [154]. Ограничение $f_i = f\Big|_{V_i} : V_i \to U$ — собственное, и следовательно, согласно 1.1.2, определена степень $\gamma\left(U_i, f_i, y\right)$ отображения $f_i$, $1 \leq i \leq i_0$.

**1.2.2. Определение.** *Целое число* $\gamma(\bigcup\limits_i U_i, f, y) =$

$\sum\limits_i \gamma(U_i, f_i, y) = \gamma(Q)$ *назовем $Q$-степенью отображения $f$.*

Легко убедиться, что определение $Q$-степени корректно, т. е. не зависит от выбора окрестности $U(y)$.

**1.2.3. Определение.** *Собственное отображение $f$ назовем положительно (соответственно отрицательно) ориентированным на континууме отображения $c$, если существует порция $Q \supset c$ такая, что при всех $Q' \subset Q$ $Q'$-степень $\gamma(Q') \geq 0$ (соответственно $\gamma(Q') \leq 0$).*

Если указанное неравенство выполняется на каждом континууме отображения, то говорим о положительной (отрицательной) ориентированости отображения $f$ области $D$, и будем говорить о строгой ориентированости, если все неравенства не обращаются в нуль.

**1.2.4. Определение.** *Скажем, что собственное отображение имеет на континууме отображения $c$ локальную степень $\gamma(c)$, если существует открыто-компактная порция $Q \subset f^{-1}f(c)$ такая, что для произвольной открыто-компактной порции $Q' \subset Q$ такой, что $Q' \supset c$, $\gamma(Q')$ =const $(= \gamma(c))$.*

**1.2.5. Определение.** *Назовем собственное отображение $f : D \to D_1$ изолированным на континууме отображения $c$, если $c$ — изолированная компонента множества $f^{-1}f(c)$. Если указанное свойство имеет место на всех континуумах отображения $c \subset D$, то назовем $f$ изолированным отображением (dc — отображением от discrete и continuum).*

**1.2.6. Замечание.** Классическое определение — случай, когда континуум вырожден, т.е. состоит из точки, не исключается.

**1.2.7. Лемма.** *Если отображение $f$ изолированно на континууме $c \subset D$, то на $c$ существует локальная степень отображения.*

Доказательство следует из определения 1.2.4, так как $c$ будет открыто-компактной порцией $f^{-1}f(c)$.

**1.2.8. Лемма.** *Для того чтобы локальная степень $\gamma(c)$ существовала на континууме отображения $c \subset D$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой открыто-компактной порции $Q \subset f^{-1}f(c)$ на каждой компоненте $c' \subset Q \setminus c$ существовала локальная степень $\gamma(c')$, причем $\gamma(c') = 0$.*

Необходимость следует из определения $\gamma(c)$. Если теперь рассмотрим открыто-компактную порцию $Q \subset f^{-1}f(c)$ и при $c' \subset Q$, $c' \neq c$, $\gamma(c') = 0$, то $\gamma(Q) = \gamma(c) + \sum\limits_{c'} \gamma(c') = \gamma(c)$, что доказывает достаточность.

**1.2.9.** В некоторых случаях удобно другое определение локальной степени. Соотношение между определениями изучено ниже.

Для произвольного континуума отображения $c \subset f^{-1}(y)$ и произвольной окрестности $U(y)$ точки $y$ такой, что $U(y) \cap f(\partial D) = \varnothing$, выберем связную компоненту $V \subset f^{-1}(U)$ такую, что $V \supset c$. Тогда, согласно 1.1.2, определена степень отображения $\gamma(V, f, y, U)$. Скажем, что $f$ имеет на континууме отображения $c \subset D$ локальную степень $\gamma_1(c)$, если существует окрестность $U(y)$ такая, что при всех

$$U'(y) \subset U(y), \qquad \gamma(V', f, y, U') = \mathrm{const}\,(= \gamma_1(c)),$$

где $V' \supset c$ — компонента $f^{-1}(U)'$. Степень $\gamma(V, f, y, U)$ при таком определении уже зависит от выбора $U(y)$, а именно: если $U' \subset U$, то $\gamma(V, f, y, U) = \gamma(V', f, y, U') + \sum\limits_i \gamma(V_i, f, y, U')$, где $V_i$ — компоненты $f^{-1}(U')$, лежащие в $V$ и не совпадающие с $V'$.

**1.2.10. Лемма.** *Если $\gamma(c)$ существует, то существует и $\gamma_1(c)$, причем $\gamma_1(c) = \gamma(c)$.*

***Доказательство.*** Пусть $Q \supset c$ такая, что для произвольной $Q' \subset Q$, $\gamma(Q') = \gamma(Q)$. Выберем $U(y)$ для $y = f(c)$ такую, что если $U_i \subset f^{-1}(U)$ и $U_i \cap Q \neq \varnothing$, то $U_i \cap \left[f^{-1}f(c) \setminus Q\right] = \varnothing$. Взяв тогда область $V \subset f^{-1}(U)$, $V \supset c$, для $Q' = Q \cap V$, получим

$$\gamma(c) = \gamma(Q) = \gamma(Q') = \gamma(V, f, f(c), U) = \gamma_1(c).$$

Последнее равенство следует из того, что предыдущие равенства будут выполняться для произвольной $U'(y) \subset U(y)$.

**1.2.11. Определение.** *Собственное отображение $f : D \to D_1$ назовем квазиоткрытым на континууме отображения $c$, если для произвольного открытого множества $V$, содержащего $c$, образ $f(c)$ принадлежит $\mathrm{Int}\, f(V)$ по отношению к $D_1$.*

**1.2.12. Лемма.** *Пусть $f : D \to D_1$, и для совокупности открытых областей $\{U_i\}$ таких, что $U_{i+1} \subset U_i$ и $\bigcap\limits_i U_i = y = f(c)$, имеем $\gamma(V_i, f, y, U_i) \neq 0$. Тогда $f$ — квазиоткрыто на континууме отображения $c$.*

***Доказательство.*** Предположим противное. Тогда для некоторой компоненты $V(c)$ из $f^{-1}\left(U(y)\right)$, $\overline{V} \subset D$ точка $\underline{y = f(c)}$ будет граничной для $W = f(V)$. Очевидно, что $\operatorname{Int} W \neq W$ и $\overline{U(y) \setminus W} \neq U(y) \setminus W$, поэтому $H_c^n(W) = 0$. Гомоморфизм $f^* : H_c^n\left(U(y)\right) \to H_c^n\left(V(c)\right)$ индуцирован отображением $f : V(c) \to U(y)$, которое можно представить в виде

$$V(c) \xrightarrow{\ f_0\ } f\left[V(c)\right] = W \xrightarrow{\ i\ } U(y),$$

где $i$ — вложение. Тогда $f^* = f_0^*\, i^*$,

$$H_c^n\left(U(y)\right) \xrightarrow{\ i^*\ } H_c^n(W) \xrightarrow{\ f_0^*\ } H_c^n\left(V(c)\right).$$

Но так как $H_c^n(W) = 0$, получим $i^*\left[H_c^n\left(U(y)\right)\right] = 0$, следовательно, $f^*\left[H_c^n\left(U(y)\right)\right] = 0$ и $\gamma(V, f, y, U) = 0$. Знак равенства выполняется для всех $U_i \subset U$. Полученное противоречие доказывает лемму.

**1.2.13. Лемма.** *Пусть $f$ — собственно и положительно (отрицательно) ориентированно на всех компонентах из множества $f^{-1}f(c)$, $c \subset D$. Тогда подмножество всех континуумов отображения $c' \subset f^{-1}f(c)$, на каждом из которых $\gamma\left(V_i, f, y, U_i\right) > 0$ $\left(\gamma\left(V_i, f, y, U_i\right) < 0\right)$ для бесконечной последовательности $\{U_i\}$, $U_{i+1} \subset U_i$, $\bigcap U_i = y = f(c)$, $V_i$ — компонента $f^{-1}(U_i)$, $V_i \supset c'$ является изолированным в $D$ и на каждом из них существует степень отображения $\gamma\left(c'\right)$.*

***Доказательство.*** Задача сводится к доказательству положительности степени при отображении произвольной открыто-компактной порции. После этого, в предположении существования предельного континуума отображения $c_0$ во множестве строго положительно (строго отрицательно) ориентируемых континуумов отображения из $f^{-1}f(c)$, выбираются непересекающиеся окрестности для $L$ континуумов отображения из этого множества, $L > \gamma_0$, $\gamma_0 = \gamma\left(Q, f, f\left(c_0\right)\right)$ ($Q$ — открыто-компактная порция континуумов отображения $c_0$, содержащая $L$ выбранных континуумов отображения). Из "принципа аргумента" 1.1.3 получим противоречие, доказывающее лемму. Легко видеть, что указанные непересекающиеся окрестности существуют в силу замкнутости отображения $f$.

## 1.3 Применение локальной степени

**1.3.1. Теорема.** *Пусть в $M^n$ задан произвольный компакт $E$ и пусть отображение $f : M^n \to N^n$ такое, что в каждой компоненте множества $M^n \setminus E$ $f$ — собственно и $\gamma(c) > 0$ существует на каждом континууме отображения $c \subset M^n \setminus E$. Тогда либо $f(M^n) = N^n$, либо $f(E) \supset f(M^n \setminus E)$, т.е. в последнем случае все значения, которые отображение принимает вне $E$, оно принимает и на $E$.*

***Доказательство.*** Если $f(M^n) = N^n$, то теорема доказана. Если же $f(M^n) \neq N^n$, то $H_c^n(f(M^n)) = 0$, так как в этом случае $f(M^n)$ — компактное подмножество $N^n$. Тогда степень отображения $\gamma(M^n, f, y) = 0$ для всех $y \in N^n$. Так как на каждом континууме отображения $c \subset M^n \setminus E$ существует степень $\gamma(c) > 0$, то найдется окрестность $U(y)$ точки $y = f(c)$ такая, что $V(c) \subset M^n \setminus E$, $V(c)$ — компонента $f^{-1}(U)$ и $\gamma(V, f, y, U) > 0$. Тогда найдется компонента $V_1 \subset f^{-1}(U)$, для которой $\gamma(V_1, f, y, U_i) < 0$, $f(V_1) \supset y$, потому что суммарная степень $\gamma\left(f^{-1}U, f, y, U\right) = \gamma(M^n, f, y) = 0$. А так как на всех континуумах отображения из $M^n \setminus E$ локальная степень больше нуля, то $V_1 \cap E = \varnothing$, и значит, существует $c_1 \subset f^{-1}f(c)$, $c_1 \subset E$. В силу произвольности выбора $c$ теорема доказана.

**1.3.2. Теорема.** *Пусть $f : D \to D_1$ — собственное отображение, $D$ — область в $M^n$ и $E \subset D$ — замкнутое подмножество континуумов отображения таких, что для каждого $c \subset E$ найдется последовательность континуумов отображения $\{c_n\}$, которая сходится к $c$, $c_n \subset D \setminus E$. На каждой компоненте открытого множества $D \setminus E$ существует локальная степень отображения $\gamma(c)$, причем $\gamma(c) > 0$ и $f(E) = f(D) = D_1$. Тогда в $D_1$ существует множество $D_1'$ всюду второй категории (на $D_1$), для каждой точки $y_0$ которого найдется бесконечная последовательность $\{c_m\}$ континуумов отображения $c_m \subset D \setminus E$ таких, что $f(c_m) = y_0$.*

***Доказательство.*** Определим в $D$ множества $F_p$ $(p = 0, 1, 2, ...)$ всех точек $y$, каждой из которых соответствует не более чем $p$ континуумов отображения из $D \setminus E$. Так как $f$ квазиоткрыто в $D \setminus E$, то легко видеть, что дополнение к $F_p$ открыто, т.е. $F_p$ $(p = 0, 1, 2, ...)$ замкнуто в $D$, при этом для $p \geqslant 1$ множество $F_p$ даже компактно в

$D$.

Очевидно, что имеют место включения

$$F_0 \subset F_1 \quad \ldots \subset F_p \subset \ldots .$$

Покажем теперь, что в наших условиях каждое из множеств $F_p$ $(p = 0, 1, 2, ...)$ нигде не плотно в $H = f(D)$. Допустим, что $F_p$ содержит некоторый открытый шар $V$ и пусть $y_0 \in V$ — одна из точек допустимой "кратности" среди всех точек $V$; ей соответствует не более чем $p$ континуумов отображения $c_k \subset D \setminus (k = 1, 2, ..., k_0; k_0 \leqslant p)$. Далее, возьмем такие попарно непересекающиеся окрестности $U(c_k)$, замыкания которых принадлежат $D\setminus E$: образы этих замыканий суть замкнутые области $V_k$, содержащие точку $y_0$ строго внутри. Пересечение всех $V_k$ содержит некоторую окрестность $V'$ точки $y_0$ в силу конечности $k$.

Очевидно, удаляя замкнутые области $\overline{U(c_k)}$ из $D$, получим некоторую область $D'$, содержащую компакт $E$ и такую, что ни одна точка из $D' \setminus E$ не имеет образа внутри $V'$.

По теореме 1.3.1 для некоторого континуума отображения $c_0 \in E$ будем иметь: $f(c_0) = y_0$. Так как $E$ нигде не плотно в $D' = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{k_0} \overline{U(c_k)}$, то существует последовательность континуумов отображения $\{c_m\}$, $c_m \subset D' \setminus E$, сходящихся к $c_0 : c_m \to c_0 \ m \to \infty$. Начиная с некоторого $m$, все значения $f(c_m)$ попадут внутрь окрестности $V'$ точки $f(c_0) = y_0$, но это противоречит построению $V'$.

Значит, множество $\widetilde{F} = \bigcup\limits_{p} F_p$ есть множество первой категории в $H$ и следовательно, $D_1' = H \setminus \widetilde{F} = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} (H \setminus F_p)$ будет второй категории, которое, как легко видеть, обладает требуемым свойством.

**1.3.3. Теорема** (о продолжении). *Пусть $f : D \to D_1$ — собственно, причем $\gamma(c) > 0$ ($\gamma(c) < 0$) всюду в $D$, кроме, возможно, множества континуумов отображения $E \subset D$ такого, что $f(D) \setminus f(E)$ всюду плотно в $f(D)$. Тогда:*

*или отображение $f$ является dc и квазиоткрыто в $D$, причем $\gamma(c) > 0$ ($\gamma(c) < 0$) для всех $c \subset D$;*

*или найдется подмножество $E(0) \subset E$ континуумов отображения со следующими свойствами:*

*а) $E(0)$ открыто в $D$;*

*б) $E(0)$ совпадает со множеством всех континуумов, для которых $\gamma(c) = 0$;*

*в) на $D \setminus E(0)$ отображение $f$ является dc и всюду $\gamma(c) > 0$ ($\gamma(c) < 0$);*

*г) имеет место равенство $f\left(D \setminus E(0)\right) = f(D)$.*

***Доказательство.*** Пусть $c$ — континуум отображения, $U(y)$ — произвольная окрестность точки $y = f(c)$. Если для каждой $U(y)$ в связной компоненте $V(c) \subset f^{-1}(U)$ содержатся континуумы отображения из $D \setminus E$, то получаем а). Если же найдется окрестность $U(y)$ такая, что $V(c)$ полностью лежит в $E$, то $f^* = f_0^* i^*$, $f_0 = f\Big|_V : V \to f(V) \subset f(E)$, $i : f(V) \to D_1$. Отображение $f_0$ — собственное отображение $V$ в $U$, образ которого не совпадает с $U$. Поэтому аналогично лемме 1.2.13 получаем, что $f^*\left[H_c^n\left(U(y)\right)\right] = 0$ и $\gamma(c) = 0$, так как $H_c^n\left(f(V)\right) = 0$.

Множество $E(0)$ открыто в $D$. Тогда $D \setminus E(0)$ замкнуто, а значит, замкнуто и $f\left(D \setminus E(0)\right) \supset f(D) \setminus f(E)$. Из плотности $f(D) \setminus f(E)$ в $f(D)$ и замкнутости $f\left(D \setminus E(0)\right)$ следует, что $f\left(D \setminus E(0)\right) = f(D)$. Теорема доказана.

**1.3.4. Замечание.** Пусть $M^n$ и $N^n$ — дифференцируемые многообразия класса $C^1$ и $f : M^n \to N^n$ — дифференцируемое отображение класса $C^1$. Тогда образ множества $E(0)$ точек, в которых якобиан $J(x)$ обращается в нуль, согласно теореме Сарда [205], имеет меру нуль в $N^n$. Следовательно, дополнение к $f\left(E(0)\right)$ всюду плотно в $N^n$. В точках, в которых якобиан не равен нулю, существует степень отображения, равная ±1, в зависимости от знака якобиана [144]. Используя доказанную нами теорему о продолжении, получаем утверждение.

**1.3.5. Теорема.** *Пусть $f : D \to D_1$ — дифференцируемое собственное отображение класса $C^1$ ($D$ и $D_1$ — области дифференцируемых многообразий класса $C^1$) такое, что*

*1) $J(x) \geq 0$ ($J(x) \leq 0$) для всех $x \in D$;*

*2) если $c$ — континуум отображения такой, что при $x \in c$ (если $c$ — невырожденный континуум отображения, то очевидно, что $J(x) = 0$ для всех $x \in c$) найдется последовательность $x_m \to x_0$, $x_0 \in c$, такая, что $J\left(x_m\right) > 0$ ($J\left(x_m\right) < 0$). Тогда отображение $f$*

*является $dc$ и квазиоткрыто в $D$, причем $\gamma(c) > 0$ ($\gamma(c) < 0$), для всех континуумов отображения $c \subset D$.*

**1.3.6. Определение.** *Отображение $f : X \to Y$ называется монотонным, если для произвольной точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}y$ связен.*

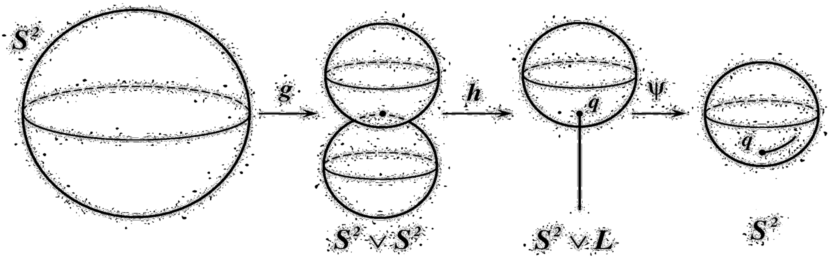

Рис. 1

**1.3.7. Пример.** Пусть точка $q$ есть общая точка двух сфер букета $S^2 \bigvee S^2$ и пусть $g : S^2 \to S^2 \bigvee S^2$ — монотонное отображение, стягивающее экватор в точку $q$ и гомеоморфное вне экватора (см. рис. 1).

Пусть $L$ — диаметр одной из сфер букета, содержащий точку $q$; $\pi : S^2 \to L$ — ортогональная проекция сферы на отрезок. Задаем отображение $h : S^2 \bigvee S^2 \to S^2 \bigvee L$ букетов пространств, тождественным на первой сфере, и проекцию $\pi$ — на второй. Пусть $\phi : L \to S^2$ — отображение класса $C^\infty$ с условием $\phi(q) = q$ и пусть отображение $\psi : S^2 \bigvee L \to S^2$ по первой компоненте тождественно, и по второй — совпадающее с $\phi$. Суперпозиция $f = \psi hq$ — отображение класса $C^\infty$ всюду $f : S^2 \to S^2$.

**1.3.8. Теорема.** *Пусть $M^n$ и $N^n$ — дифференцируемые многообразия класса $C^1$ и $f : M^n \to N^n$ — дифференцируемое отображение класса $C^1$ такое, что множество точек, в которых $J(x) \neq 0$ плотно в множестве континуумов отображения, т.е. если $J(x) = 0$, $x \in c$, то найдется последовательность $x_n \to x_0$, $x_0 \in c$, такая, что $J(x_n) \neq 0$. Для того, чтобы $f$ было монотонным и "на", необходимо и достаточно, чтобы либо $\gamma\left(M^n, f, y\right) = 1$ и $J(x) \geq 0$, либо $\gamma\left(M^n, f, y\right) = -1$ и $J(x) \leq 0$.*

***Доказательство.*** Необходимость сразу вытекает из теоремы Сарда [205]. Достаточность следует по теореме 1.3.5, так как при указанных в нашей теореме условиях ее утверждение обеспечивает существование степени отображения на каждом континууме отображения и $\gamma(c) > 0$ ($\gamma(c) < 0$). Предполагая, что для некоторой точки $y \in N^n$ существует более чем один континуум отображения в прообразе, и применяя "принцип аргумента" 1.1.3, получаем противоречие. Теорема 1.3.6 обобщает теорему Черча [266], в которой требовалось необращение в нуль якобиана на каждом открытом подмножестве $D$ (континуум отображения может содержать открытое подмножество).

**1.3.9.** Для нульмерных отображений имеет место следующее важное утверждение [226]. Множество $E(0)$ тех точек $x \in D$, в которых существует степень $\gamma(x)$, причем $\gamma(x) = 0$ не содержит внутренних точек, т. е. $D \setminus E$ всюду плотно в $D$. Аналогом этого утверждения было бы утверждение: образ множества $E(0)$ тех континуумов отображения $c \subset D$, на которых существует степень $\gamma(c)$, причем $\gamma(c) = 0$, не содержит внутренних точек, т.е. $D_1 \setminus f\left(E(0)\right)$ всюду плотно в $D_1 = f(D)$.

Если бы это утверждение имело место, оно было бы аналогом теоремы Сарда для дифференцируемых отображений, так как локальная степень отображения играет для непрерывных отображений роль, аналогичную роли якобиана в дифференцируемом случае. Однако для произвольных непрерывных отображений указанное утверждение не верно. Покажем это.

Построим непрерывное собственное отображение открытого квадрата $Q^2 \subset \mathbb{R}^2$ на открытый квадрат, локальная степень которого равняется нулю на каждом континууме отображения. Идея построения состоит в том, что сначала мы отображаем квадрат $(-1,1) \times (-1,1)$ на единичный полуинтервал $[0,1)$, а затем строим кривую Пеано, отображающую этот полуинтервал на квадрат $(-1,1) \times (-1,1)$. Первое отображение $h$ легко устроить по закону $h(A) = a$, где

$$A = \Big\{(x,y) \Big| \left(|x| \le a, |y| = a\right) \bigvee \left(|x| = a, |y| \le a\right)\Big\}, \quad 0 \le a < 1.$$

Для задания второго отображения полуинтервала на квадрат разобьем полуинтервал $[0,1)$ на счетную последовательность замкнутых отрезков

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \, I_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \ldots, \, I_j = \left[\frac{2^j - 1}{2^j}, \frac{2^{j+1} - 1}{2^{j+1}}\right], \ldots,$$

а квадрат — на счетную последовательность замкнутых областей

$$Q_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right];$$

$$Q_1 = \left\{(x, y) \middle| \left(\frac{1}{2} \le |x| \le \frac{3}{4}, |y| \le \frac{3}{4}\right) \bigvee \left(|x| \le \frac{3}{4}, \frac{1}{2} \le |y| \le \frac{3}{4}\right)\right\};$$

$$\ldots;$$

$$Q_j = \left\{(x, y) \middle| \left(\frac{2^j - 1}{2^j} \le |x| \le \frac{2^{j+1} - 1}{2^{j+1}}, |y| \le \frac{2^{j+1} - 1}{2^{j+1}}\right) \bigvee \right.$$

$$\left. \bigvee \left(|x| \le \frac{2^{j+1} - 1}{2^{j+1}}, \frac{2^j - 1}{2^j} \le |y| \le \frac{2^{j+1} - 1}{2^{j+1}}\right)\right\};$$

$$\ldots.$$

Каждому интервалу $I_j$ поставим в соответствие область $Q_j$. Известно [154], что локально связный континуум будет непрерывным образом отрезка. Возьмем такие отображения: $g_j : I_j \to Q_j$, при этом существенно то, что $g_j$ можно согласовать так, чтобы отображение $g$, $g\Big|_{I_j} = g_j$ было непрерывным. Легко видеть, что так построенное отображение $g$ — собственно. Взяв суперпозицию отображений $f = gh$, получаем требуемое отображение.

Пусть $U(y)$ — открытая область в $Q^2$, $f^{-1}(U) = V$ — ее прообраз при отображении $f$. Тогда $U = f(V) = gh(V)$. В этом случае $f^* H_c^2 F(U) = h^* g^* H_c^2(U)$, тем не менее $g^* H_c^2(U) = 0$, так как dim $g^{-1}U = 1$. Отсюда следует, что $f^* H_c^2 F(U) = 0$, а в силу произвольности выбора $U$ получаем, что степень $\gamma(c)$ существует на каждом континууме отображения и равна нулю.

Докажем еще одну теорему о дифференцируемых отображениях. Для этого потребуется следующая лемма, справедливая и в общем случае.

**1.3.10. Лемма.** *Если $f : D \to D_1$ — собственное отображение, $c$ — континуум отображения, то для любой последовательности*

*$\{c_i\} \to c$, $c_i \subset D$, и открыто-компактной порции $Q$, лежащей в некотором открытом множестве $V \subset D$, существует такой номер $i_0 = i_0\left(Q_0\right)$, что для каждого $i > i_0$ найдется такая порция $Q_i \supset c_i$, $Q_i \subset V$, что $\gamma\left(Q_i, f, f\left(c_i\right)\right) = \gamma\left(Q_0, f, f\left(c_0\right)\right)$.*

***Доказательство.*** Пусть $c_i \subset D$ и $c_i \to c_0 \subset D$ при $i \to \infty$. Возьмем окрестность $U\left(y_0\right)$ точки $y_0 = f\left(c_0\right)$ такую, что $U\left(y_0\right) \cap f(\partial V) = \varnothing$, тогда любая компонента $V_k$, $1 \leq k \leq k_0$, прообраза $f^{-1}(U)$, пересекающая $Q_0$, лежит вместе с замыканием в $V$. Тогда, учитывая "принцип аргумента" 1.1.3, приходим к выводу, что будут иметь место соотношения 1.3.11 и 1.3.12.

**1.3.11.** $\gamma\left(Q_0, f, f\left(c_0\right)\right) = \sum\limits_k \gamma\left(V_k, f, f\left(c_0\right)\right)$.

Так как $c_i \to c_0$, то найдется номер $i_0$ такой, что $f\left(c_i\right) \in U\left(y_0\right)$. Положим $Q_i = \left(\bigcup\limits_k V_k\right) \bigcap f^{-1} f\left(c_i\right)$. Легко видеть, что $Q_i$ — открыто-компактная порция $f^{-1} f\left(c_i\right)$.

**1.3.12.** $\gamma\left(Q_i, f, f\left(c_i\right)\right) = \sum\limits_i \gamma\left(V_k, f, f\left(c_0\right)\right) = \sum\limits_k \gamma\left(V_k, f, f\left(c_0\right)\right)$.

Сравнивая 1.3.11 и 1.3.12, получаем утверждение леммы.

**1.3.13. Определение.** *Пусть $f : D \to D_1$. Континуум отображения $c_0 \subset D$ называется континуумом взаимной однозначности, если $f^{-1} f\left(c_0\right) = c_0$.*

**1.3.14. Теорема.** *Если $f : D \xrightarrow{\text{на}} D_1$ — собственное дифференцируемое отображение класса $C^1$ ($D$ и $D_1$ — открытые области дифференцируемых многообразий класса $C^1$, $M^n$ и $N^n$ соответственно), обладающие плотным множеством $E$ континуумов взаимной однозначности (под плотностью понимаем, что для любого $c_0 \subset D$ найдется последовательность континуумов отображения $\{c_m\} \to c_0$, $c_m \subset E$), то $f$ — монотонно.*

***Доказательство.*** На каждом континууме отображения $c \subset E$ существует локальная степень $\gamma(c)$. Обозначим через $E_m$ множество тех континуумов отображения $c \subset E$, на которых $\gamma(c) = m$. Имеет место лемма.

**1.3.15. Лемма.** *Если множество $E(m)$ ($E \backslash E(m)$) всюду плотно в некоторой окрестности $V \subset D$, состоящей из континуумов отображения, то на всех континуумах отображения $c \subset V$ имеет место равенство $\gamma(c) = m$ (найдется последовательность $\{Q_i\}$, $Q_i$ —*

*компактно-открытая порция* $f^{-1}f\,(c_i)$ *такая, что* $\gamma\,(Q_i, f, f\,(c_i)) \neq m\ \{c_i\} \to c$*).*

***Доказательство.*** Пусть $c_0 \subset V$ и $Q$ — произвольная открыто-компактная порция $f^{-1}f\,(c_0)$, содержащая $c_0$. В силу того, что $E(m)$ $(E \setminus E(m))$ всюду плотно в $V$, найдется последовательность континуумов отображения $c_i \subset E(m)$ $(E \setminus E(m))$, которые сходятся к $c_0$. Тогда, согласно лемме 1.3.10, найдется номер $i_0$ такой, что для каждого $i > i_0$ найдется такой элемент $Q_i \supset c_i$, $Q_i \subset V$, что $\gamma\,(Q_i, f, f\,(c_i)) = \gamma\,(Q_0, f, f\,(c_0))$. Но так как $c_i \subset E$, то $Q_i = c_i$, и следовательно, $\gamma\,(Q_0, f, f\,(c_0)) = \gamma\,(c_i) = m$ $(\neq m)$. В силу произвольности выбора $Q_0$ лемма доказана.

***Доказательство теоремы 1.3.14.*** Покажем, что множество $E(0)$ не может быть всюду плотным в $V$. Предположим обратное. Тогда по лемме 1.3.15 $\gamma(c) = 0$ для всех $c \subset V$. Множество $f(V)$ нигде не плотно в $D$, так как образ нулей степени включается в образ нулей якобиана. Пусть $c_0$ — континуум взаимной однозначности, принадлежащий $V$. Выберем последовательность точек $\{y_n\} \to f(c_0)$, $y_n \notin f(V)$. Прообраз компакта $A = (\bigcup\limits_n y_n) \bigcup f(c_0)$ — компакт. Выберем по точке $x_n \in f^{-1}(y_n)$, тогда $\{x_n\} \to x_0$, $x_0 \notin V$, и $f(x_0) = \lim\limits_{x_n \to x_0} f\,(x_n) = f\,(c_0)$. Здесь возникает противоречие с выбором $c_0$ как континуума взаимной однозначности. И значит множество $E \setminus E(0)$ в $V$ всюду плотно и, согласно лемме 1.3.15, $\gamma(c) \neq 0$ для всех $c \subset V$. Из леммы 1.2.12 вытекает, что $f$ — квазиоткрыто.

Покажем теперь, что $f$ — монотонно. Если это не так, то найдутся два континуума отображения $c_1$ и $c_2$ такие, что $f\,(c_1) = f\,(c_2) = y$. Выберем окрестность $U(y)$ такую, что связные компоненты $V_1$ и $V_2$ из $f^{-1}(U)$, содержащие $c_1$ и $c_2$ соответственно, попарно не пересекаются. Ограничение $f$ на компоненты $V_i$, $i = 1, 2,$ — собственное, квазиоткрытое. Отсюда вытекает, что образ $V_i$ должен быть одновременно замкнут и открыт в $U(y)$, следовательно, $f(V_1) = f(V_2) = U$. Однако по условию в $V_1$ должен найтись континуум $c$ взаимной однозначности отображения $f$, что противоречит равенству $f(V_1) = f(V_2)$. Теорема доказана.

**1.3.16. Следствие.** *Если* $f : M^n \xrightarrow{\text{на}} N^n$ *— дифференцируемое собственное отображение дифференцируемых многообразий,* *обладающее плотным множеством континуумов взаимной однозначности, то $f$ — монотонно.*

**1.3.17.** Пример 1.3.9 показывает, что утверждение, аналогичное теореме 1.3.12, не имеет место для произвольных непрерывных отображений. Приведенное в примере отображение можно построить так, чтобы оно обладало плотным множеством континуумов взаимной однозначности, но не было монотонным. Теорема 1.3.14 переносит на собственные дифференцируемые отображения следующую теорему (см. [226]).

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — нульмерное отображение. Если множество точек взаимной однозначности плотно в $D$, то $f$ — гомеоморфизм.

Аналогичную теорему для непрерывных собственных отображений можно доказать, если отображение $f$ ациклично в размерностях, отличных от нуля, а именно.

**1.3.18. Теорема.** *Если $f : D \to D_1$ — собственное отображение, ацикличное в размерностях, отличных от нуля, т.е. $H^i\left(f^{-1}(y)\right) = 0$ при $i > 0$, и обладающее плотным множеством континуумов взаимной однозначности, то $f$ — монотонно.*

***Доказательство.*** Используя факторизационную теорему Эйленберга [353], представим $f$ в виде $f = gh$, где $h$ — монотонное, а $g$ — нульмерное отображения. В нашем случае $h$ ациклично во всех размерностях. Тогда из теоремы Вьеториса–Бегла [202] следует, что $h(D)$ — обобщенное когомологическое многообразие, т.е. такое, у которого топологическое пространство групп когомологий, и последние изоморфны соответствующим группам области $D$. То же имеет место и для групп произвольных подобластей $V \subset h(D)$ и $h^{-1}V \subset D$. Отображение $g$ будет нульмерным отображением $h(D)$ в $D_1$, обладающим всюду плотным множеством точек взаимной однозначности. Тогда, по теореме 1.3.12 $g$ — топологическое вложение. Отсюда вытекает, что $f$ — монотонно. Исходя из теоремы 1.3.18, теореме Вьеториса–Бегла можно придать следующую формулировку.

**1.3.19. Теорема.** *Если $f : M^n \to N^n$ (или $D \to D_1$) — собственное отображение такое, что $H^i\left(f^{-1}(y)\right) = 0$ при $i > 0$ для всех $y \in N^n$, а $H^0\left(f^{-1}(y)\right) = 0$ для множества точек $y$, всюду плотного в $N^n$, то $H^i\left(M^n\right) \approx H^i\left(N^n\right)$ при всех $i$.*

## 1.4 Критерии монотонности

**1.4.1. Лемма.** *Пусть* $D$ *— область в* $M^n$ *и пусть* $U_1$ *и* $U_2$ *— непересекающиеся области в* $D$ *такие, что* $\partial U_1 = \partial U_2$ *и* $\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \neq D$.

*Не существует собственного отображения* $f : D \to D_1$ $(D_1 \subset N^n)$ *такого, что выполнены условия:*

1) $f(U_1) = f(U_2)$;

2) $f(\partial U_1) \cap f(U_i) = \varnothing$, $i = 1, 2$;

3) $f^* : H_c^{n-1}(f(\partial U_1)) \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial U_1)$ *— эпиморфизм.*

***Доказательство.*** Пусть такое отображение существует. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-1}(f(\partial U_1)) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & H_c^n(f(U_1)) \arrow[d, "f_i^*"] & \\
H_c^{n-1}(\partial U_1) \arrow[r, "\delta"] & H_c^n(U_i) \arrow[r] & H_c^n\left(\overline{U_i}\right)
\end{tikzcd}$$

Группа $H_c^n\left(\overline{U_i}\right) = 0$, так как $\overline{U_i} \neq D$.

Из точности нижней строки диаграммы следует, что $\delta$ — эпиморфизм, тогда $\delta f^*$ — эпиморфизм и из коммутативности диаграммы $f_i^*$ — эпиморфизм. Группа $H_c^n(U_i) = \mathbb{Z}$ как группа открытой области, но тогда $H_c^n(f(U_1)) = \mathbb{Z}$ (она может быть нулевой или $\mathbb{Z}$, как $n$-мерная группа связного подмножества; нетривиальность ее следует из нетривиальности $f_i^*$) и $f_i^*$ — изоморфизм. Отсюда следует, что отображение

$$f_1^* \oplus f_2^* : H_c^n(f(U_1)) \to H_c^n(U_1 \cup U_2) \approx H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2)$$

— мономорфизм.

В коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-1}(f(\partial U_1)) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & H_c^n(f(U_1)) \arrow[d, "f_1^* \oplus f_2^*"] & \\
H_c^{n-1}(\partial U_1) \arrow[r, "i^*"] & H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2) \arrow[r] & H_c^n\left(\overline{U_1} \cup \overline{U_2}\right) = 0
\end{tikzcd}$$

$H_c^n\left(\overline{U_1} \cup \overline{U_2}\right) = 0$, так как $\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \neq D$.

Тогда $i^*$ и $i^* f^*$ — эпиморфизмы из точности нижней строки, а из коммутативности диаграммы вытекает, что $f_1^* \oplus f_2^*$ — эпиморфизм, отсюда следует, что $f_1^* \oplus f_2^*$ — изоморфизм.

Но группа $H_c^n(f(U_1)) = \mathbb{Z}$ не может быть изоморфной группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2)$.

Лемма доказана.

**1.4.2. Лемма.** *Пусть $D$ — область в $M^n$ и пусть $U_1$ и $U_2$ — непересекающиеся области в $D$ такие, что $\partial U_1 = \partial U_2$ и $\overline{U_1} \cup \overline{U_2} = D$.*

*Не существует собственного отображения $f : D \to D_1$ $(f(U_1) \subset N^n)$ такого, что выполнены одновременно:*

1) *условия 1 — 3 леммы 1.4.1;*

2) *степень $\gamma(U_i, f, y) > 0$ при $i = 1, 2$.*

***Доказательство.*** Если такое отображение существует, то согласно лемме 1.4.1 отображения $f_i^* : H_c^n(f(U_1)) \longrightarrow H_c^n(U_i)$ – изоморфизмы. Запишем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-1}(f(\partial U_1)) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"] & H_c^n(f(U_1)) \arrow[r] \arrow[d, "f_1^* \oplus f_2^*"] & H_c^n(f(D)) \arrow[d] & \\
H_c^{n-1}(\partial U_1) \arrow[r, "\delta"] & H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2) \arrow[r, "i^*"] & H_c^n(D) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Гомоморфизм $i^*$ имеет нетривиальное ядро $\operatorname{Ker} i^* \supset \{a, -a\}$, $a \neq 0$. В силу точности нижней строки $\operatorname{Im} \delta = \operatorname{Ker} i^*$. Тогда $\operatorname{Im} \delta h^* = \operatorname{Ker} i^*$.

Из коммутативности диаграммы следует, что $\operatorname{Im}(f_1^* \oplus f_2^*) \supset \operatorname{Im} \delta h^* \supset \{a, -a\}$. В силу условия 2 леммы это возможно только при $a = 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

**1.4.3. Определение.** *Для замкнутого подмножества $L \subset \overline{K}$ множества $K \subset M^n$ назовем множество $C_k(f, L)$ (или просто $C(f)$) предельным, т.е. множество всех точек $\alpha$ из $\overline{f(K)}$ таких, что существует последовательность $\{z_n\} \subset K \backslash L$, $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0 \in L$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = \alpha$.*

**1.4.4. Определение.** *Пусть $f$ — непрерывное отображение открытого в $M^n$ множества $D$ в то же пространство $M^n$. Назовем отображение $f$ затухающим к границе, если для произвольно-*

*го* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что из* $\rho(x, \partial D) < \delta$ *следует, что* $\rho(x', \partial D) < \varepsilon$, *где* $x' \in f^{-1}f(x)$.

**1.4.5. Определение.** *Для границы* $\partial D$ *области* $D \subset M^n$ *назовем множество* $C_D(f, \partial D)$ *(или просто* $C(f)$*) предельным, т.е. множество всех точек* $\alpha$ *из* $\overline{f(D)}$ *таких, что существует последовательность* $\{z_n\} \subset D$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \in \partial D$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$.

Если $f$ определено на $\partial D$, предельное множество просто обращается в $f(\partial D)$.

**1.4.6. Лемма.** *Условие* $C(f) \cap f(D) = \varnothing$ *достаточно, а при* $\gamma(x) > 0$ *и необходимо для того, чтобы* $f$ *было затухающим к границе.*

***Доказательство.*** *Достаточность.* Пусть выполнено $C(f) \cap f(D) = \varnothing$, но существует $\varepsilon$ такое, что для всех $\delta_n > 0$, $\{\delta_n\} \to 0$ найдутся $x_n$ и $x'_n$ такие, что $\rho(x_n, \partial D) < \delta_n$ и $\rho(x'_n, \partial D) > \varepsilon$, где $x'_n \in F_x$. Тогда из $\{x'_n\}$ легко выделить сходящуюся подпоследовательность, потому что все $x'_n$ можно поместить в компактное подмножество, граница которого находится на положительном расстоянии от $\partial D$. Пусть эта подпоследовательность $\left\{x'_{n_k}\right\} \to x_0 \in D$, но при этом $\{x_{n_k}\} \to \partial D$; $f(x_{n_k}) = f\left(x'_{n_k}\right)$ и $\lim\limits_{x'_{n_k}\to x_0} f\left(x'_{n_k}\right) = \lim\limits_{x_{n_k}\to\partial D} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, а отсюда следует, что наше условие не выполнено.

*Необходимость.* Пусть выполнено условие затухания к границе, но $C(f) \cap f(D) = A \neq \varnothing$. Тогда найдутся точки $y_0 \in A$, $x_0 \in D$ такие, что $f(x_0) = y_0$, и последовательность $\{x_n\} \to \partial D$ такая, что $\{f(x_n)\} \to f(x_0)$. Найдется также и последовательность $\{x'_n\} \to x_0$ такая, что $f(x'_n) = f(x_n)$.

Тогда для произвольного $\delta_n > 0$ существует $x_n$ такое, что $\rho(x_n, \partial D) < \delta_n$. Обозначим $\rho(x_0, \partial D) = \varepsilon_1$, и выберем $N$ такое, что $\rho(x'_n, x_0) < \frac{\varepsilon_1}{2}$ для всех $n > N$.

Тогда из условия затухания для $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$, $\rho(x'_n, \partial D) > \varepsilon$ и $\rho(x_n, \partial D) > \delta$ для каждого $x_n \in F_{x'_n}$ при $n > N$, а это означает, что $\{x_n\} \not\to \partial D$. Полученное противоречие доказывает лемму.

**1.4.7. Лемма.** *Условие* $C(f) \cap f(D) = \varnothing$ *необходимо и достаточно для того, чтобы отображение* $f$ *было собственным.*

***Доказательство.*** *Достаточность.* Пусть это не так. Тогда найдутся компакт $A \subset f(D)$ и последовательность $\{x_n\} \to \partial D$ такие, что $\rho\left(f^{-1}(A), \partial D\right) = 0$ и $x_n \in f^{-1}A$. Отсюда вытекает, что $f(x_n) \in A \subset f(D)$. Но, так как $A$ — компакт, $\{f(x_n)\} \to y_0 \in A$, то есть $\left[\lim\limits_{x_n \to \partial D} f(x_n)\right] \bigcap f(D) = y_0 \neq \varnothing$. Получили противоречие.

*Необходимость.* Пусть для произвольного компакта $A \subset f(D)$, $f^{-1}(A)$ — компакт, и пусть $C(f) \cap f(D) = B \neq \varnothing$ тогда найдется последовательность $\{x_n\} \to \partial D$ такая, что $\{f(x_n)\} \to y_0 \in B$. Множество $A = \{f(x_n)\} \cup y_0$ — компакт, а его прообраз $f^{-1}(A)$ включает в себя последовательность $\{x_n\}$, которая сходится к границе и не имеет предельной точки в $D$. То есть $f^{-1}(A)$ не компакт. Полученное противоречие доказывает лемму.

**1.4.8. Лемма.** *Из условия $C(f) \cap f(D) = \varnothing$ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$, найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in D$ таких, что $\rho(x, \partial D) < \delta$, $\rho(f(x), \partial f(D)) < \varepsilon$.*

***Доказательство.*** Если это не так, то найдется последовательность $\{x_n\} \to \partial D$ такая, что $y_n = f(x_n)$, $\rho(y_n, \partial f(D)) > \varepsilon$, $\lim y_n = y_0 \in f(D)$, но так как $A = \{f(x_n)\} \cup y_0$ — компакт, то по лемме 1.4.7 $f^{-1}(A)$ также является компактом, а значит, $\{x_n\} \not\to \partial D$. Лемма доказана.

**1.4.9. Лемма.** *Условие $C(f) \cap f(D) = \varnothing$ достаточно, для того, чтобы степень отображения $f$ существовала в каждой точке $y_0 \in f(D)$ и была одинаковой.*

***Доказательство.*** Известно [349], что для всякого собственного отображения $f : D \to Y$ — степень отображения существует для всех точек $Y \setminus f(\partial D)$ и постоянна на каждой связной компоненте $Y \setminus f(\partial D)$. Как показано в лемме 1.4.7 отображение, удовлетворяющее указанному выше условию, совершенно, кроме того, $f(D)$ — связно как непрерывный образ связной области $D$. Лемма доказана.

**1.4.10. Теорема.** *Пусть $f : D \to N^n$ ($D$ — открытое множество в $M^n$) и выполнены условия:*

1) *$C(f) \cap f(D) = \varnothing$;*

2) *для каждой компоненты $D_i \subset D$ найдется открытая порция $\Gamma_i = U_i \cap \partial D$ границы $\partial D$ такая, что если последовательность $\{x_n\} \to x_0 \in \Gamma_i$ ($x_n \in D$), то последовательность $\left\{x_n^{'}\right\} \to x_0$, где $x_n^{'}$ — произвольная точка из $f^{-1}f(x_n)$, и $\Gamma_i$ разбивает свою открытую*

*окрестность* $U_i$ *в* $M^n$*;*

3) *на каждом континууме* $c \subset D$ *существует локальная степень* $\gamma(c) > 0$.

*Тогда* 1) $f\Big|_D$ *— монотонное отображение;* 2) *гомоморфизм* $f^* : H_c^n\left(f(D)\right) \longrightarrow H_c^n\left(D\right)$, *индуцированный отображением* $f$ *— изоморфизм.*

***Доказательство.*** а) Если $D$ — открытая область и в произвольной окрестности $\Gamma$ найдутся точки, не принадлежащие $D$, найдется $U_0$ — открытая область в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\Gamma_1 = U_0 \cap \partial D \subset \Gamma$. Разбиение на $U_0 \setminus D$ доопределим одноточечным.

Таким образом определенное разбиение вместе с разбиением, индуцированным отображением $f$ на $D$, задает проекцию $P : U \to Y$, где $Y$ — пространство разбиения. Степень отображения $P|_D$ совпадает со степенью отображения $f$. Для проекции $P$ выполнено условие леммы 1.4.9 $C_U(P, \partial U) \bigcap P(U) = \varnothing$, а поэтому, согласно этой лемме, степень одинакова во всех точках $P(U)$.

Для замкнутого в $U$ множества $D \cup \Gamma_1 = F$ имеет место точная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\ j\ } H_c^{i-1}(F) \xrightarrow{\ \partial\ } H_c^i\left(U \setminus F\right) \xrightarrow{\ i\ } H_c^i(U) \xrightarrow{\ j\ }$$

$$\xrightarrow{\ j\ } H_c^i(F) \longrightarrow \ldots,$$

где $H_c^i(X)$ — группы когомологий с компактными носителями с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}$ — целых чисел.

Группы $H_c^n\left(U \setminus F\right)$ и $H_c^n\left(U\right)$ равны $\mathbb{Z}$ как $n$-мерные группы когомологий $n$-мерных открытых областей.

$H_c^n\left(F\right) = 0$, так как $F = \overline{F} \neq U$.

Обозначим $V = P(U)$, $H = P(F)$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_c^n\left(V \setminus H\right) \arrow[r] \arrow[d, "P^*", "\wr\wr"'] & H_c^n\left(V\right) \arrow[d, "\mu^*"] & \\
H_c^n\left(U \setminus F\right) \arrow[r, "i"] & H_c^n\left(U\right) \arrow[r] & H_c^n\left(F\right) = 0
\end{tikzcd}$$

Аналогично предыдущему замечанию $H_c^n\left(V \setminus H\right) = \mathbb{Z}$, $H_c^n\left(V\right) =$

$\mathbb{Z}$, $P^*$ — изоморфизм в силу одноточечности $P\Big|_{U\setminus F}$. Отображение $\mu^* : H_c^n(V) \to H_c^n(U)$ определяет степень отображения.

Отображение $i : H_c^n(U \setminus F) \to H_c^n(U)$ — эпиморфизм (в силу точности последовательности пары $(U, F)$). Из этого вытекает, что и отображение $\mu^* : \mathbb{Z} = H_c^n(V) \to H_c^n(U) = \mathbb{Z}$ — эпиморфизм (в силу коммутативности диаграммы), а это возможно только тогда, когда $\mu^*$ — изоморфизм, т.е. степень отображения $\gamma = \pm 1$. Как было замечено выше, $\mu$ будет степенью отображения $f$.

Так как $\gamma(c) > 0$, то имеет место "принцип аргумента"

$$1 = \gamma = \sum_{c' \in F_C} \gamma(c'),$$

и значит, $\gamma(c') = 1$. Из того, что локальная степень отображения $f$ тождественно равна единице, следует, что $f$ имеет точно один континуум отображения для точки $y \in f(D)$. Следовательно $f\Big|_D$ — монотонное отображение.

б) Если $D = \bigcup\limits_i D_i$, где $D_i$ — открытые области, и $\Gamma_i \neq \Gamma_j$ при $i \neq j$, то для доказательства достаточно показать, что при отображении $f$ образы различных компонент множества $D$ не пересекаются.

Рассмотрим случай, когда образы $f(D_1)$ и $f(D_2)$ двух компонент $D$ пересекаются, но не совпадают. Тогда по меньшей мере для одной из двух областей $f(D_1)$ и $f(D_2)$, пусть для определенности это будет $f(D_1)$, найдется предельная точка $y$, которая лежит в другой области, а значит, на положительном расстоянии от границы $f(D)$. В силу монотонности отображения на каждой компоненте для последовательности $\{y_n\} \subset f(D_1) \cap f(D_2)$; $\{y_n\} \to y$ найдутся последовательности $\{x'_n\} \in D_1$, $\{x'_n\} \to \partial D_1$ и $\{x''_n\} \in D_2$, $\{x''_n\} \to x_0 \in D_2$, $f(x'_n) = f(x''_n)$. Тогда $\left[\lim\limits_{x'_n \to \partial D} f(x'_n)\right] \bigcap f(x_0) = y$, что противоречит условию 1.

Остается показать ошибочность предположения, что образы двух различных компонент $D_1$ и $D_2$ множества $D$ совпадают.

Если порция $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, мы сразу получаем противоречие. Пусть $x_1 \in \Gamma_1$, $x_2 \in \Gamma_2$, тогда для $\{x_n\} \to x_1$, $\{x_n\} \in D_1$, найдется $\{x'_n\} \in D_2$; $\{x'_n\} \to \partial D_2$, $f(x_n) = f(x'_n)$, $\{x'_n\} \to x_2 \neq x_1$, а значит найдется число $N$, что для всех $n > N$, $\rho(x_n, x'_n) > a$ для некоторого фиксированного числа $a$, что противоречит условию 2.

Пусть теперь $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$.

Пусть $U$ открытая область в $\mathbb{R}^n$ такая, что $U \cap \partial D_1 = U \cap \partial D_2 = \Gamma$. Дополним разбиение, индуцированное отображением $f$ на $D_1 \cup D_2$, одноточечным на $U \setminus (D_1 \cup D_2)$. Легко видеть, что проекция $P$ полученного разбиения будет открыто-замкнутым отображением, для которого выполнены все условия леммы 1.4.9. Пусть $X = U \cup D_1 \cup D_2$, $F = X \setminus D_1$, $Y = P(X)$, $V = P\left(D_1\right)$.

Используя точность когомологических последовательностей пар и коммутативность диаграмм получаем

$$\begin{tikzcd}
H_c^n\left(V\right) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"] & H_c^n\left(Y\right) \arrow[d, "\mu^*"] & \\
H_c^n\left(D_1\right) \arrow[r] & H_c^n\left(X\right) \arrow[r] & H_c^n\left(F\right) = 0,
\end{tikzcd}$$

где $h^*$ — изоморфизм в силу топологичности $f$, а значит, и $P$ на $D_1$, $H_c^n(F) = 0$, так как $\overline{F} = F \neq X$ (замыкание рассматривается в пространстве $X$)

$$H_c^n\left(X\right) = \mathbb{Z}, \quad H_c^n\left(Y\right) = \mathbb{Z}.$$

Аналогично доказательствам предыдущих теорем получаем, что $\gamma = 1$. Но так как мы предполагали, что $f\left(D_1\right) = f\left(D_2\right)$, то степень отображения $f$, в силу неравенства $\gamma(x) > 0$, не может быть меньше 2. Полученное противоречие доказывает утверждение.

в) Пусть $D = \bigcup\limits_i D_i$ и найдется пара индексов $i \neq j$ такая, что $\Gamma_i = \Gamma_j$. Рассмотрим область $D^{'} = D_i \cup D_j \cup \Gamma_i$. Собственное отображение $f$ индуцирует на $D_i \cup D_j$ полунепрерывное сверху разбиение [154]. Дополним это разбиение до разбиения области $D^{'}$ одноточечным на $\Gamma_i$. Легко убедиться, используя условие 2 теоремы, что мы получим полунепрерывное сверху разбиение области $D^{'}$. Для области $D^{'}$ имеем: $D_i \cap D_j = \varnothing$, $\partial D_i = \partial D_j$ (рассматривается относительная граница в $D^{'}$) $\overline{D_i} \cup \overline{D_j} = D^{'}$.

Из пункта а) доказательства следует, что ограничения $f\Big|_{D_i}$ и $f\Big|_{D_j}$ монотонны. Чтобы доказать, что $f\Big|_{D_i \cup D_j}$ монотонно, достаточно показать, что $f\left(D_i\right) \cap f\left(D_j\right) = \varnothing$. Предположим, что это пересечение не пусто. В силу собственности отображения и положительности степени на каждой компоненте, если $f\left(D_i\right) \cap f\left(D_j\right) \neq \varnothing$, то $f\left(D_i\right) = f\left(D_j\right)$ (иначе степень на одной из компонент равнялась бы нулю). Рассмотрим проекцию $P$ разбиения области $D^{'}$.

На $D_i$, $D_j$ проекция $P$ совпадает с $f$. Это значит, что мы построили отображение $P$ со свойствами:

1) $P\left(D_i\right) = P\left(D_j\right)$;

2) $P\left(\Gamma_i\right) \cap P\left(D_k\right) = \varnothing$, $k = i, j$; (в силу одноточечности разбиения на $\Gamma_i$);

3) $P^* : H_c^{n-1}\left(P\left(\Gamma_i\right)\right) \longrightarrow H_c^{n-1}\left(\Gamma_i\right)$ — изоморфизм, так как $P\Big|_{\Gamma_i}$ — гомеоморфизм;

4) степень $\gamma\left(D_k, P, y\right) = \gamma\left(D_k, f, y\right) > 0$ при $k = i, j$.

Но в силу леммы 1.4.2 такое отображение не существует. Пункт в) доказан.

г) Пусть $D$ — открытая область, но в окрестности $\Gamma$ нет точек, не принадлежащих $D$ ($\Gamma$ — часть внутренней границы). Выберем $V$ — открытую окрестность $\Gamma$ такую, что $V \cap \partial D = \Gamma$, $f^{-1} f\left(V \backslash \Gamma\right) = V \backslash \Gamma$. Для этого достаточно положить $V = \Gamma \cup \left(D \backslash f^{-1} f\left(D \backslash U\right)\right)$. Тогда $V \backslash \partial D$ распадается на открытые области $V_i$ и для $V \backslash \partial D$ выполнены пункты б) и в) доказываемой теоремы. Значит, $f\Big|_{\cup V_i}$ — монотонно и $f_0^* : H_c^n\left(f\left(\cup V_i\right)\right) \longrightarrow H_c^n\left(\cup V_i\right)$ — изоморфизм.

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_c^n(f(\cup V_i)) \arrow[r] \arrow[d, "f_0^*"'] & H_c^n(f(D)) \arrow[d, "f^*"] & \\
H_c^n(\cup V_i) \arrow[r] & H_c^n(D) \arrow[r] & H_c^n(D \backslash \cup V_i)
\end{tikzcd}$$

Группа $H_c^n\left(D \backslash \cup V_i\right) = 0$, так как $D \backslash \cup V_i = \overline{D \backslash \cup V_i} \neq D$.

Аналогично лемме 1.4.1 устанавливаем, что $f^*$ — изоморфизм, тогда степень $\gamma\left(D, f, y\right) = 1$.

Так как $\gamma(c) > 0$, то $f^{-1} f(c)$ состоит из изолированного множества континуумов отображения и имеет место "принцип аргумента":

$$1 = \gamma\left(D, f, y\right) = \sum_{c^{'} \subset f^{-1} f(c)} \gamma\left(c^{'}\right),$$

значит, $\gamma\left(c^{'}\right) = 1$. Из этого равенства видим, что $f^{-1}f(c) = c$, т.е. отображение $f$ — монотонно.

Теорема доказана.

**Замечание.** Уже из хода доказательства теоремы легко вытекает, что она останется верной при замене условия 2), если $f$ определено на $\Gamma$ условием $2^{'}$) для некоторой открытой порции $\Gamma$ границы $\partial D$ такой, что $H_c^{n-1}(\Gamma) \neq 0$, тогда $f$ индуцирует эпиморфизм

$$f^* : H_c^{n-1}\left(f(\Gamma)\right) \longrightarrow H_c^{n-1}\left(\Gamma\right) \quad \text{и} \quad f(\Gamma) \cap C_D\left(f, \partial D \backslash \Gamma\right) = \varnothing.$$

**1.4.11. Теорема.** *Пусть $f : D \to N^n$ и выполнены условия:*

1) $C_D\left(f, \partial D\right) \cap f(D) = \varnothing$;

2) *найдется замкнутое множество $F$, принадлежащее границе, и открытое подмножество $U \subset \partial D$, где $U$ — $(n-1)$-мерное многообразие такое, что $U \backslash F$ — несвязно, причем в любой окрестности $U$ лежат внешние точки к $D$ и $f$ непрерывно продолжается на $U$;*

3) $H_c^{n-2}\left(F \cap U\right) \neq \varnothing$ *и* $h^* : H_c^{n-2}\left(F_1\right) \longrightarrow H_c^{n-2}\left(F \cap U\right)$ — *эпиморфизм, где $F_1 = f\left(F \cap U\right)$, а гомоморфизм $h^*$ групп когомологий индуцирован отображением $f$;*

4) $f\left(F \cap U\right) \cap \left(f\left(U \backslash F\right) \cup C_D\left(f, \partial D \backslash U\right)\right) = \varnothing$;

5) *на каждом континууме отображения $c \subset D$ существует локальная степень $\gamma(c) > 0$.*

*Тогда* 1) $f\Big|_D$ — *монотонное отображение;*

2) *гомоморфизм $f^* : H_c^n\left(f(D)\right) \longrightarrow H_c^n\left(D\right)$, индуцированный*

*отображением $f$, будет изоморфизмом.*

***Доказательство.*** В силу условия 4 найдется открытое подмножество $U_2 \subset U$ такое, что $U_2 = f^{-1}f\left(U_2\right)$ и $F$ разбивает $U_2$. Пусть $U_0$ — связная компонента $U_2 \backslash F$, $\overline{U_0} \neq U_2$.

а) Пусть $f^{-1}f\left(U_0\right) = U_0$. В этом случае $U_0$ — связная компонента $U \setminus F$, вблизи которой имеются внешние точки. Заметим, что в силу условия 2 такая компонента всегда существует, $V_0 = f\left(U_0\right)$, $\overline{U_0} = U_0 \cup F$. Используя точные последовательности и коммутативность диаграмм получаем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-2}(F_1) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"] & H_c^{n-1}(V_0) \arrow[d, "f_0^*"] & \\
H_c^{n-2}(F) \arrow[r, "\delta_1"] & H_c^{n-1}(U_0) \arrow[r] & H_c^{n-1}\left(\overline{U_0}\right) = 0.
\end{tikzcd}$$

При этом $h^*$ — эпиморфизм по условию теоремы, $\delta_1$ — эпиморфизм из точности когомологической последовательности пары $\left(\overline{U_0}, F\right)$. Тогда, в силу коммутативности диаграммы, $f_0^*$ — эпиморфизм.

Пусть $D_1 = f(D)$, тогда можно записать коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-1}(V_0) \arrow[r] \arrow[d, "f_0^*"] & H_c^{n}(D_1) \arrow[d, "\mu^*"] & \\
H_c^{n-1}(U_0) \arrow[r, "\delta"] & H_c^{n}(D) \arrow[r] & H_c^{n}(D \cup U_0) = 0.
\end{tikzcd}$$

Группа $H_c^n(D \cup U_0)$ — равна нулю потому, что вблизи $U_0$ имеются внешние точки. Как было показано выше, $f_0^*$ — эпиморфизм; $\delta$ — эпиморфизм из точности когомологической последовательности пары $(D \cup U_0, U_0)$.

Тогда в силу коммутативности диаграммы $\mu^*$ — эпиморфизм. Гомоморфизм $\mu^*$, как и в теореме 1.4.10, определяет степень отображения. Согласно последнему, рассуждения, аналогичные приведенным в конце доказательства теоремы 1.4.10, показывают, что $f|_D$ — гомеомеорфизм. В этом случае теорема доказана.

в) Пусть $f^{-1}f(U_0) \neq U_0$. Тогда $A = f^{-1}f(U_0)$ — несвязно. Выберем открытую область $W_0 \subset D$ такую, что $U_0 \subset \partial W_0$, но при этом $\partial W_0 \cap (A \backslash U_0) = \varnothing$ и $W_0$ — компонента $f^{-1}f(W_0)$. Последнее возможно в силу того, что $U_0$ — компонента $f^{-1}f(U_0)$.

При таком выборе ограничение $f\Big|_{W_0}$ — собственное. Аналогично случаю а) можно показать, что $f\Big|_{W_0}$ — монотонное отображение и гомоморфизм $f^* : H_c^n(f(W_0)) \longrightarrow H_c^n(W_0)$ — изоморфизм. Заметим, что в силу того, что локальная степень не обращается в нуль, каждая компонента $W_i \subset f^{-1}f(W_0)$ отображается на $f(W_0)$. Если обозначить $U_i = \partial W_i \cap \partial D$, то, в силу условия 1 и нашего замечания,

$f(U_i) = f(U_0)$. Заметим, что $A$ — область в $(n-1)$-мерном многообразии $U$, $F \supset \partial U_i$ (если рассматривать границу относительно $A$). Предположим, что компонент $W_i$ больше чем 2. Тогда имеем:

1) $f(U_i) = f(U_0)$;

2) $f(F) \cap f(U_i) = \varnothing$;

3) коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-2}(F_1) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"] & H_c^{n-1}(f(U_0)) \arrow[d, "f_i^*"] & \\
H_c^{n-2}(F \cap U) \arrow[r, "\delta"] & H_c^{n-1}(U_i) \arrow[r] & H_c^{n-1}(U_i \cup F)
\end{tikzcd}$$

Группа $H_c^{n-1}(U_i \cup F) = 0$, так как $U_i \cup F = \overline{U_i \cup F} \neq A$.

Тогда из точности нижней строки диаграммы вытекает, что гомоморфизмы $\delta$ и $\delta h^*$ — эпиморфны, а из коммутативности диаграммы следует, что $f_i^*$ — эпиморфизм.

Но, как мы установили в лемме 1.4.1, отображения с перечисленными свойствами не существует. Значит, частей $W_i$ не больше двух, а если и две, то $U_0 \cup U_1 \cup F = A$.

Пусть выполнено $f(U_0) = f(U_1)$ и $U_0 \cup U_1 \cup F = A$.

Для областей $U_0$ и $U_1$ выполнены перечисленные ранее три условия. Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-1}(f(U_0)) \arrow[r] \arrow[d, "f_i^*"] & H_c^{n}(f(W_0)) \arrow[d, "\widetilde{f_i^*}"] & \\
H_c^{n-1}(U_i) \arrow[r] & H_c^{n}(W_i) \arrow[r] & H_c^{n}(W_i \cup U_i) = 0
\end{tikzcd}$$

Используя предыдущие рассуждения, приходим к выводу, что $\widetilde{f_i^*}$ — эпиморфизм. Из положительности степени следует, что гомоморфизмы $\widetilde{f_i^*}$ сохраняют ориентацию, но в этом случае должны сохранять ориентацию и гомоморфизмы $f_i^*$.

Это в свою очередь значит, что $\gamma(U_i, f, y) > 0$, $i = 1, 0$. Но, как установлено в лемме 1.4.2, такое отображение невозможно. Итак, мы установили, что $f^{-1}f(W_0) = W_0$, $f\Big|_{W_0}$ — монотонное отображение и $f^* : H_c^n(f(W_0)) \longrightarrow H_c^n(W_0)$ — эпиморфизм.

Тогда, используя коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_c^n\left(f\left(W_0\right)\right) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^n\left(f(D)\right) \arrow[d] & \\
H_c^n\left(W_0\right) \arrow[r] & H_c^n\left(D\right) \arrow[r] & H_c^n\left(D \backslash W_0\right)=0
\end{tikzcd}$$

и рассуждения, аналогичные применяемым при доказательстве теоремы 1.4.10, устанавливаем утверждение теоремы.

Пусть $f:\overline{D}\rightarrow N^n$, где $D=D_1\times D_2\times...\times D_k$, $D_i$ — области в $n_i$-мерных многообразиях $M_i^{n_i}$, $\overline{D_i}\neq M_i^{n_i}$, $\sum n_i=n$. Очевидно, что тогда $H_c^{n_i}\left(\overline{D_i}\right)=0$, $H_c^l\left(D_i\right)=H_c^l\left(\overline{D_i}\right)=0$ при $l>n_i$.

Введем обозначения

$$D_1\times D_2\times...\times D_{i-1}\times\overline{D_i}\times\partial D_{i+1}\times...\times\partial D_k=A_i,\qquad i=1,\ldots,k,$$

$$D_1\times D_2\times...\times D_{i-1}\times\partial D_i\times...\times\partial D_k=B_i.$$

Очевидно, что $A_i\backslash B_i=B_{i+1}$ и $\dim A_i=n-k+i$, $\dim B_i=n-k+i-1$.

Имеет место теорема.

**1.4.12. Теорема.** *Пусть* $f:\overline{D}\rightarrow N^n$ *(где* $D$ *имеет вышеуказанный вид) такое, что:*

1) $f\left(\partial D\right)\cap f(D)=\varnothing$;

2) $f\left(B_i\right)\cap f\left(B_{i+1}\right)=\varnothing$, $i=1,2,...,k-1$;

3) $f\left(B_k\right)\cap f\left(\overline{D}\backslash B_k\right)=\varnothing$;

4) *отображение* $h_1^*:H_c^{n-k}\left(f\left(B_1\right)\right)\longrightarrow H_c^{n-k}\left(B_1\right)$, *индуцированное ограничением* $f\Big|_{B_1}$ *— эпиморфизм;*

5) *на каждом континууме отображения* $c\subset D$ *существует локальная степень* $\gamma(c)>0$.

*Тогда* 1) $f\Big|_D$ *— монотонное отображение;*

2) *гомоморфизм* $f^*:H_c^n\left(f(D)\right)\longrightarrow H_c^n\left(D\right)$, *индуцированный*

*отображением* $f$ *— изоморфизм.*

***Доказательство.*** Обозначим

$$h_m^*:H_c^{n-k+m-1}\left(f\left(B_m\right)\right)\longrightarrow H_c^{n-k+m-1}\left(B_m\right)$$

гомоморфизм, индуцированный ограничением $f\Big|_{B_m}$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-k+m-1}(f(B_m)) \arrow[r] \arrow[d, "h_m^*"] & H_c^{n-k+m}(f(B_{m+1})) \arrow[d, "h_{m+1}^*"] & \\
H_c^{n-k+m-1}(B_m) \arrow[r, "\delta_m"] & H_c^{n-k+m}(B_{m+1}) \arrow[r] & H_c^{n-k+m}(A_m).
\end{tikzcd}$$

По формуле Кюннета

$$H_c^{n-k+m}\left(A_m\right) =$$

$$H_c^{n-k+m}\left(D_1 \times D_2 \times ... \times D_{i-1} \times \overline{D_i} \times \partial D_{i+1} \times ... \times \partial D_k\right) =$$

$$= \sum_{l+j=n-k+m} H_c^l\left(D_1 \times D_2 \times ... \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times ... \times \partial D_k\right) * H_c^j\left(\overline{D_i}\right) \oplus$$

$$\oplus \sum_{l+j=n-k+m+1} H_c^l\left(D_1 \times D_2 \times ... \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times ... \times \partial D_k\right) * H_c^j\left(\overline{D_i}\right),$$

$$\dim\left(D_1 \times D_2 \times ... \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times ... \times \partial D_k\right) = n - k + m - \dim D_i.$$

Тогда $H_c^l\left(D_1 \times D_2 \times ... \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times ... \times \partial D_k\right) = 0$ при $l > n - k + m - \dim D_i$.

Но для выполнения равенства $l + j = n - k + m - 1$ необходимо, чтобы имело место одно из неравенств: либо $l > n - k + m - \dim D_i$, либо $j > \dim D_i$.

Отсюда следует, что вторая сумма равна нулю. Аналогично, первая сумма дает в результате только одно слагаемое:

$$H_c^{n-k+m-\dim D_i}\left(D_1 \times D_2 \times ... \times D_{i-1} \times \partial D_{i+1} \times ... \times \partial D_k\right) \otimes$$

$$\otimes H_c^{\dim D_i}\left(\overline{D_i}\right),$$

но $H_c^{\dim D_i}\left(\overline{D_i}\right) = 0$, и значит, $H_c^{n-k+m}\left(A_m\right) = 0$, а поэтому, в силу точности нижней строки диаграммы, $\delta_m$ — эпиморфизм. Условие 2) обеспечивает собственность отображений. Тогда эпиморфность отображения $h_m^*$ влечет за собой эпиморфность $h_{m+1}^*$. Отображение $h_1^*$ — эпиморфно по условию теоремы. Последовательным применением предыдущих рассуждений получим, что $h_k^*$ — эпиморфизм.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-1}\left(f\left(B_k\right)\right) \arrow[r] \arrow[d, "h_k^*"'] & H_c^n\left(f(D)\right) \arrow[d, "f^*"] & \\
H_c^{n-1}\left(B_k\right) \arrow[r, "\delta"] & H_c^n\left(D\right) \arrow[r] & H_c^n\left(\overline{D}\right) = 0;
\end{tikzcd}$$

ее коммутативность обеспечена условиями 1 и 3. Группа $H_c^n\left(\overline{D}\right)$ обращается в нуль, так как $\overline{D}$ — замкнутое собственное подмножество $M^n$. Группы $H_c^n\left(D\right)$ и $H_c^n\left(f(D)\right)$ — изоморфны $\mathbb{Z}$. Теперь утверждение теоремы легко следует из рассуждений, приведенных в конце доказательства теоремы 1.4.10.

## 1.5 Примеры и применения

**1.5.1.** Построим пример, который показывает существенность требования, что порция границы Γ в теореме 1.4.10 должна быть открытой.

Отобразим область с двумя "концами" на область с одним "концом" (см. рис. 2).

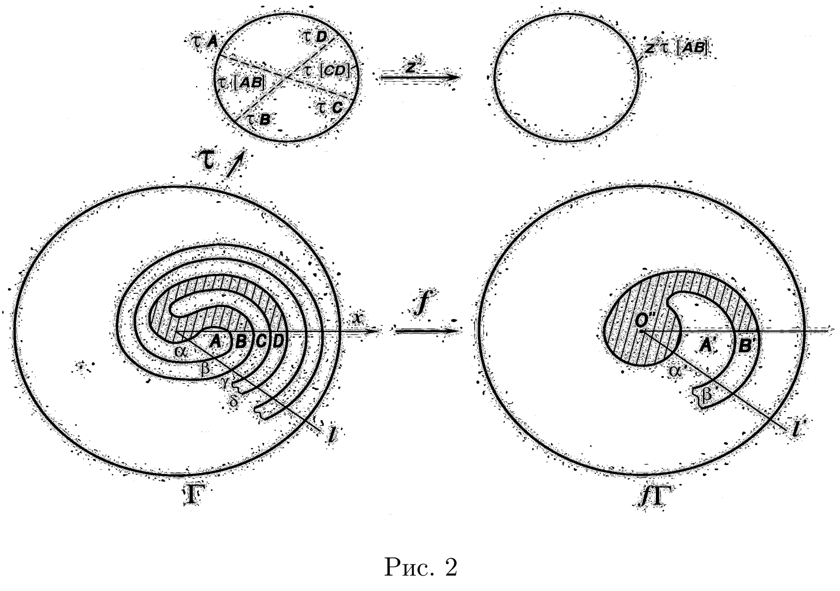

Рис. 2

Границами этих областей будут спиралеобразные линии без кратных точек, которые асимптотически приближаются к окружностям $\Gamma$ и $f(\Gamma)$ соответственно. Для упрощения объяснения задания $f$ на области $D$ (область с двумя "концами") сделаем вспомогательные разрезы: области $D$ — по отрезкам $AB$ и $CD$, которые лежат на оси $Ox$; а области $F(D)$ — по отрезку $A'B'$, который лежит на оси $O'x'$. Так как область $K$ ограничена контуром $ABCD$ и представляет собой топологический круг, ее можно отобразить на единичный круг топологическим отображением $\tau$ так, чтобы отрезки $AB$ и $CD$ перешли в центрально-симметричные дуги на окружности $\partial\tau(K)$, а точка $O$ — в центр круга. К $\tau(K)$ применим отображение $z^2$. Оно обладает свойством: $z^2\tau[AB] = z^2\tau[CD]$, и отображает $\tau(K)$ на единичный круг. Теперь к полученному образу достаточно применить топологическое отображение $\tau'$, которое отображает его на топологический круг, ограниченный контуром $A'B'$, и переводит дугу $z^2\tau\,[AB]$ в отрезок $[A'B']$, а точку $z^2\tau O$ — в $O'$.

Будем считать $f\Big|_K = \tau' z^2 \tau$. Осталось определить $f$ на обоих "концах" и окружности $\Gamma$. Отобразим оба "конца" области $D$, каждый гомеоморфно, на "конец" области $f(D)$ по следующему правилу. Будем проводить лучи из точек $O$ и $O'$ областей $D$ и $f(D)$. Рассмотрим произвольный луч $Ol$, выходящий из точки $O$ под углом $\alpha$ к оси $Ox$. Поставим ему в соответствие луч $O'l'$, выходящий из точки $O'$ под углом $\alpha$ к оси $O'x'$.

Оба луча пересекаются со своими "концами" соответственно. Так как пересечение $Ol$ с обоими "концами" чередуются, разобьем эти пересечения на последовательные пары, начиная с точки $O$. На этих парах зададим отображение $f$ так, чтобы $f[\alpha,\beta] = f[\gamma,\delta] = [\alpha',\beta']$, причем $f$ — гомеоморфно на каждом отрезке и представляет собой непрерывное продолжение отображения $f$ с области $K$. Точке пересечения $Ol$ с $\Gamma$ поставим в соответствие точку пересечение $O'l'$ с $f(\Gamma)$. Легко видеть, что при таком определении $f\Big|_D$ имеет степень отображения $\gamma = 2$, а $f\Big|_\Gamma$ является гомеоморфизмом. Выполняются все условия теоремы 1.4.10, кроме одной — $\Gamma$ не является открытой порцией границы. Аналогичное отображение можно построить для произвольного $\gamma = m$, увеличивая соответственно количество "концов". Пример можно распространить на произвольную размерность

$n > 2$, осуществляя над $D$ и $f(D)$ конические надстройки.

**1.5.2.** Если в примере 1.5.1 из области $D$ исключить область $K$ (см. рис. 2), легко получить пример отображения нескольких областей ("концов") на одну. Каждая область отображается гомеоморфно. Все области имеют окружность $\Gamma$ как общую часть границы. Теорема 1.4.10 в этом случае не применима, так как $\Gamma$ не представляет собой открытой порции границы.

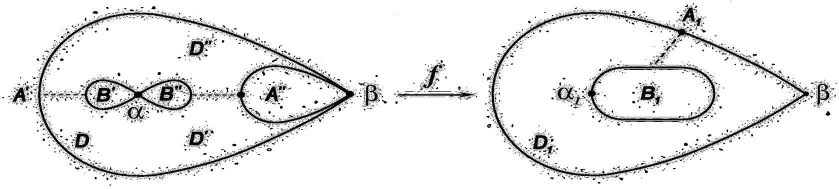

Рис. 3

**1.5.3.** Следующий пример показывает существенность требования, чтобы множество $F$ имело окрестность $U$, где $U$ — $(n-2)$-многообразие (см. теорему 1.4.11, условие 2). Зададим отображение области $D$ (см. рис. 3) на область $D_1$.

Проведем вспомогательные разрезы $A'B'$, $A''B''$, $A_1B_1$. Легко видеть, что получившиеся области $D'$ и $D''$ гомеоморфны области $W = D_1 \setminus [A_1B_1]$. Отобразим каждую из этих областей гомеоморфно на $W$ (вместе с замыканием каждой). Гомеоморфизмы выберем такими, что $f\,(A'B') = f\,(A''B'') = A_1B_1$; $f\,(A') = f\,(A'') = A_1$; $f\,(B') = f\,(B'') = B_1$. Тогда, если в качестве $F$ выбрать точки $\alpha$, $\beta$; $f(\alpha) = \alpha_1$, $f(\beta) = \beta_1$, будем иметь $H_c^0(F) = \mathbb{Z}$, $H_c^0(F) \approx H_c^0\,(F_1)$ и множество $F$ будет разбивать свою окрестность. Теорема 1.4.11 не применима, так как окрестность множества $F$ не многообразие. В данном примере степень отображения $\gamma(f, D) = 2$.

**1.5.4. Определение.** *Множеством ветвления* $B_f$ *отображения* $f : M^n \longrightarrow N^n$ *называется множество точек, в которых* $f$ *не будет локальным гомеоморфизмом.*

Пусть $M^{2n}$ и $N^{2n}$ — комплексные многообразия и $f : D \rightarrow N^{2n}$ — голоморфное отображение области $D \subset M^{2n}$. Пусть $B_f$ — множество ветвления $f$. Известно, что для голоморфного отображения $\dim B_f \leq 2n-2$, т. е. $D \backslash B_f$ — связно. В силу теоремы Сарда, $f(D)\backslash f\,(B_f)$ всюду плотно в $f(D)$. поскольку отображение $f\Big|_{D\backslash B_f}$ —

локально гомеоморфно, то для каждой точки $x \in D \backslash B_f$ существует локальная степень отображения $\gamma(x) = \pm 1$, и в силу связности $D \backslash B_f$ — одного знака. Пусть $\gamma(x) \equiv 1$, если $x \in D \backslash B_f$. В силу теоремы о продолжении 1.3.3 на каждом континууме отображения существует локальная степень $\gamma(c) > 0$. Тогда для голоморфных отображений критерии монотонности можно записывать в виде теорем 1.4.10 – 1.4.12, опуская требование существования степени $\gamma(c) > 0$, которое всегда выполняется. Условия, накладываемые на отображение в этих теоремах, обеспечивают его собственность. Если $D$ и $D_1$ — области евклидового комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, то известно, что всякое собственное голоморфное отображение $f : D \to D_1$ открыто и изолировано. Для таких отображений монотонность будет совпадать с гомеоморфностью. Значит, установленные нами критерии монотонности содержат в себе принципы граничного соответствия нульмерных открытых отображений как частный случай.

**1.5.5. Пример.** Известно, что классическая формулировка принципа граничного соответствия требует лишь, чтобы $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^2$ было внутренним (т. е. изолированным и нульмерным) отображением жордановой области $D$ и гомеоморфизмом на $\partial D$. В формулировках наших теорем входит, казалось бы, излишнее требование

$$f(D) \cap f(\partial D) = \varnothing \qquad (*)$$

(или его видоизменения). Оказывается, как мы увидим ниже, если не требовать никаких ограничений на границу (типа $\partial D$ — связное многообразие), условие $(*)$ необходимо даже в плоском случае.

Рассмотрим отображение

$$\overline{D} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \left[x^2 + y^2 \leq 4\right] \wedge \left[(x-1)^2 + y^2 \geq 1\right] \right\}$$

на круг

$$\overline{D_1} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Для ясности описания ограничимся сначала отображением подобласти $\overline{D'} \subset \overline{D}$ на подобласть $\overline{D_1'} \subset \overline{D_1}$:

$$\overline{D'} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \left[(x, y) \in \overline{D}\right] \wedge [x \geq 0] \right\},$$

$$\overline{D_1'} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \left[(x, y) \in \overline{D_1}\right] \wedge \left[(x \geq 0) \vee \left[(x-1)^2 + y^2 \leq 1\right]\right] \right\}.$$

Легко видеть, что области $\overline{D'}$ и $\overline{D'_1}$ гомеоморфны между собой, более того, их можно отобразить друг на друга некоторым гомеоморфизмом $\varphi$, оставляющим на месте совпадающую часть границы и переводящим

$$\lambda = \left\{(x, y) \,\middle|\, \left[(x-1)^2 + y^2 = 1\right] \wedge [x > 0]\right\}$$

в

$$\lambda_1 = \left\{(x, y) \,\middle|\, \left[(x-1)^2 + y^2 = 1\right] \wedge [x < 0]\right\},$$

$\lambda \subset \partial D'$, $\lambda_1 \subset \partial D'_1$.

Доопределим $\varphi$ до отображения $f$ области $\overline{D}$ по принципу симметрии:

$$f(z) = \begin{cases} \varphi(z), \; z \in \overline{D'}, \\ \overline{\varphi(\overline{z})}, \; z \notin \overline{D'} \end{cases}$$

($\overline{z}$ и $\overline{\varphi}$ комплексно сопряженные к $z$ и $\varphi$ соответственно).

Нетрудно убедиться, что так построенное отображение $f$ локально гомеоморфно во всех точках $z \in D$ и $f\Big|_{\partial D}$ — гомеоморфизм. Глобально $f$ — не гомеоморфизм, подобласть $V = \left\{(x, y) \,\middle|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}$ области $D_1$ при отображении $f$ покрывается дважды. Естественно, условие $(*)$ не выполнено.

**1.5.6. Утверждение.** *Если* $f\Big|_{D}$ *— открытое отображение, то условие* $(*)$ *автоматически выполняется при требовании, что* $\partial D$ *— связное многообразие и* $f\Big|_{\partial D}$ *— гомеоморфизм.*

***Доказательство.*** В силу открытости $f$, $\partial f(D) \subset f(\partial D)$. Пусть условие $(*)$ не выполнено, тогда $\partial f(D) \neq f(\partial D)$. Рассмотрим $G = f(\partial D) \backslash \partial f(D)$ — открытое подмножество $f(\partial D)$. В силу непрерывности отображения $f$ прообраз $f^{-1}(G)$ — открытое подмножество $\partial D$. Тогда $\partial D \backslash f^{-1}(G)$ гомеоморфно $\partial f(D)$ в силу гомеоморфизма на границе. Отсюда следует, что $H^{n-1}\left(\partial D \backslash f^{-1}(G)\right) \approx H^{n-1}\left(\partial f(D)\right) \neq 0$. Неравенство нулю последней группы следует из точной когомологической последовательности пары $\left(f\left(\overline{D}\right), \partial f(D)\right)$. Но $\partial D \backslash f^{-1}(G) \neq \partial D$ — замкнутое подмножество многообразия $\partial D$, поэтому $H^{n-1}\left(\partial D \backslash f^{-1}(G)\right) = 0$. Из полученного противоречия следует истинность утверждения.

## 1.6 Кратность отображений областей

А. Косинский в работе [309] поставил следующие вопросы.

1. Пусть мы имеем конечнократное непрерывное отображение $n$-мерного листа Мебиуса $M^n$ в единичный шар $Q^n$ такое, что $f$ отображает границу $M^n$ гомеоморфно на границу $Q^n$. Будет ли множество точек из $Q^n$, которые имеют по меньшей мере три прообраза, иметь размерность $n$?

2. Пусть $f$ — непрерывное отображение $n$-мерного листа Мебиуса $M^n$ в единичный шар $Q^n$ такое, что $f$ отображает границу $M^n$ на границу $Q^n$ со степенью 1. Существует ли при этих условиях точка $y \in Q^n$, имеющая по меньшей мере три прообраза? Выполнено ли равенство $f\left(M^n\right) = Q^n$?

В этом параграфе дано доказательство общего утверждения, из которого как следствия получаем утвердительные ответы на поставленные выше вопросы.

Поскольку мы не предполагаем априори ориентируемости многообразий (а в случае листа Мебиуса ее и не будет), то мы чуть обобщим конструкцию степени отображения в п. 1.1, рассматривая группы с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2$ вычетов по модулю 2. Если $D \subset M^n$ — открытая область, то для групп когомологий с компактными носителями $\bmod 2$ имеем $H_c^n\left(D; \mathbb{Z}_2\right) = \mathbb{Z}_2$. Заметим, что ориентируемости $M^n$ не предполагается. Мы можем выбрать образующую группы $H_c^n\left(D; \mathbb{Z}_2\right)$, которую обозначаем через $g_D$. Предполагаем также, что $f : D \to D_1$ $(D_1 \subset N^n)$ — собственное отображение открытых областей , т.е. прообраз произвольного компакта, принадлежащего $D_1$, есть компакт в $D$. Выберем для произвольной точки $y \in D_1$ некоторую связную открытую окрестность $U(y) \subset D_1$. Существует число $k = \{0, 1\}$ такое, что $jf^*\left(g_U\right) = k \cdot g_D$, где $j : H_c^n\left(f^{-1}(U); \mathbb{Z}_2\right) \to H_c^n\left(D; \mathbb{Z}_2\right)$ — канонический гомоморфизм, а гомоморфизм $f^* : H_c^n\left(U; \mathbb{Z}_2\right) \to H_c^n\left(f^{-1}(U); \mathbb{Z}_2\right)$ индуцирован отображением $f$. Это число обозначим через $\gamma_2(D, f, y)$ и назовем степенью отображения $\bmod 2$. Легко проверить, что в ориентируемом случае

$$\gamma_2(D, f, y) = \gamma(D, f, y) \bmod 2,$$

где $\gamma(D, f, y)$ — степень отображения. Кроме того, если $\{D_i\}$ — совокупность открытых подобластей $D$ таких, что $D_i \cap D_j = \varnothing$ при

$i \neq j$ и ограничения $f$ на $D_i$ и на $\bigcup\limits_i D_i$ — собственные отображения в $f(\bigcup\limits_i D_i) = f(D)$, то имеет место следующий "принцип аргумента":

$$\gamma_2\left(\bigcup_i D_i, f, y\right) = \sum_i \gamma_2\left(D_i, f, y\right) \bmod 2.$$

Сумма в правой части определена корректно, поскольку, как легко убедиться, $\gamma_2\left(D_i, f, y\right)$ отлична от нуля только на конечном числе слагаемых.

**1.6.1. Определение.** *Целое число* $\gamma_2\left(\bigcup\limits_i U_i, f, y\right) = \sum\limits_i \gamma_2\left(U_i, f_i, g\right) mod 2 = \gamma_2(Q)$ *назовем $Q$-степенью $mod 2$ отображения $f$.*

**1.6.2. Определение.** *Будем говорить, что собственное отображение имеет на континууме отображения с локальную степень $\gamma_2(c)$, если существует открыто-компактная порция $Q \supset f^{-1}f(c)$ такая, что для произвольной открыто-компактной порции $Q^{'} \subset Q$, такой, что $Q^{'} \supset c$, $\gamma_2\left(Q^{'}\right) = const \; (= \gamma_2(c))$.*

Таким образом введенная степень приспособлена для изучения отображений областей неориентируемых многообразий. В ориентируемом случае она совпадает с локальной степенью на континууме отображения, приведенной по $\bmod 2$. Легко установить свойства и условия существования степени $\gamma_2(c)$. Все эти условия легко получаются из утверждений, аналогичных утверждениям первого параграфа. Методы их доказательства повторяются с очевидными изменениями, поэтому мы не будем на них останавливаться.

Отметим только "принцип аргумента" для локальной степени: если локальная степень существует на всех континуумах отображения $c_i \subset f^{-1}f(c) \subset D$, то имеет место равенство

$$\gamma_2(D, f, y) = \sum_{c \subset f^{-1}y} \gamma_2(c) \bmod 2.$$

Сумма в правой части определена корректно, так как из условия существования степени на континууме отображения следует, что только конечное число слагаемых отлично от нуля.

**1.6.3. Определение.** *Собственное отображение* $f : D \to D_1$ *назовем квазиоткрытым на континууме отображения* $c$, *если для произвольного открытого множества* $V$, *содержащего* $c$, *образ* $f(c)$ *принадлежит* $\operatorname{Int} f(V)$ *по отношению к* $D_1$.

**1.6.4. Лемма.** *Пусть* $f : D \to D_1$ *— собственное отображение. Если* $f$ *не квазиоткрыто на континууме отображения* $c$, *то существует локальная степень* $\gamma_2(c) = 0$.

***Доказательство.*** Пусть отображение $f$ не квазиоткрыто на континууме отображения $c$. Найдется окрестность $V(c)$ такая, что $f(c) \in \partial f(V)$. Тогда $f(c) \in \partial f(V_1)$ для произвольного открытого множества $V_1 \subset V$ имеет место включение $V_1 \supset c$. Если $U$ — открытая окрестность $f(c)$, то $f\left(f^{-1}\left(U \cap V_1\right)\right) \neq U$ и значит, $H_c^n\left(f\left(f^{-1}\left(U \cap V_1\right)\right); \mathbb{Z}_2\right) = 0$. Но отсюда следует, что для произвольной открыто-компактной порции $Q \subset f^{-1}f(c)$, принадлежащей $V$, существует $Q$-степень $\operatorname{mod} 2$ $\gamma_2(Q) \equiv 0$, а тогда из определения локальной степени вытекает равенство $\gamma_2(c) = 0$.

Перейдем к основному утверждению параграфа. Заметим, что во всех последующих рассуждениях $D$ — открытая область $M^n$, а $D_1$ — открытая область многообразия $N^n$ с компактным замыканием $\overline{D_1}$ в $N^n$.

**1.6.5. Теорема.** *Пусть* $f : \overline{D} \to \overline{D_1}$ *— собственное отображение такое, что:*

1) $f\left(\partial D\right) \cap f\left(\operatorname{Int} D\right) = \varnothing$;

2) $H_c^{n-1}\left(\partial D; \mathbb{Z}_2\right) \neq 0$;

3) *гомоморфизм* $f_0^* : H_c^{n-1}\left(f(\partial D); \mathbb{Z}_2\right) \to H_c^{n-1}\left(\partial D; \mathbb{Z}_2\right)$, *индуцированный ограничением* $f\Big|_{\partial D}$, *— изоморфизм;*

*Тогда либо* $f\Big|_{D}$ *— гомеоморфизм, либо найдется точка* $y \in \operatorname{Int} D_1$, *имеющая по меньшей мере три прообраза в* $D$. *Если же известно, что отображение* $f$ *нульмерно, то во втором случае множество* $A = \{y \big| f^{-1}(y)$ *состоит не менее чем из трех точек*$\}$ *имеет размерность* $n$.

Доказательство теоремы разделим на несколько лемм.

**1.6.6. Лемма.** *Пусть выполнены условия теоремы и* $y \in f\left(\operatorname{Int} D\right)$.

*Тогда найдется континуум отображения $c \subset f^{-1}(y)$ такой, что $f$ на $c$ квазиоткрыто.*

***Доказательство.*** В самом деле, если отображение $f$ не квазиоткрыто на континуумах отображения $c \subset f^{-1}(y)$, то по лемме 1 $\gamma_2(c) = 0$. Согласно определению степени $\gamma_2(c)$, найдется открыто-компактная порция $Q$, $f^{-1}f(c) \supset Q \supset c$, такая, что $\gamma_2\left(Q^{'}\right) = 0$ для всех $Q^{'} \subset Q$. Выбирая конечное попарно непересекающееся покрытие $\{Q_i\}$ для компакта $f^{-1}f(c)$ с $\gamma_2\left(Q_i\right) = 0$, в силу "принципа аргумента" получаем

$$\gamma_2(D, f, y) = \sum_{i=1}^{i_0} \gamma_2\left(Q_i\right) = 0.$$

С другой стороны, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_c^{n-1}\left(f(\partial D); \mathbb{Z}_2\right) \arrow[r] \arrow[d, "f_0^*"'] & H_c^n\left(f(D); \mathbb{Z}_2\right) \arrow[d, "f^*"] & \\
H_c^{n-1}\left(\partial D; \mathbb{Z}_2\right) \arrow[r, "\delta"] & H_c^n\left(D; \mathbb{Z}_2\right) \arrow[r] & H_c^n\left(\overline{D}; \mathbb{Z}_2\right)
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что $H_c^n\left(\overline{D}; \mathbb{Z}_2\right) = 0$ как группа замкнутой подобласти $M^n$. Тогда из точности последовательности групп в нижней строке вытекает, что гомоморфизм $\delta$ — эпиморфизм. Отсюда получим, что суперпозиция $f_0^*\delta$, а в силу коммутативности диаграммы и гомоморфизм $f^*$ — эпиморфизмы. Значит, $H_c^n\left(f(D); \mathbb{Z}_2\right) \neq 0$, а это возможно для собственных отображений лишь тогда, когда $f(D) = D_1$ и $H_c^n\left(f(D); \mathbb{Z}_2\right) \approx H_c^n\left(D_1; \mathbb{Z}_2\right) \approx \mathbb{Z}_2$. Но эпиморфизм группы $\mathbb{Z}_2$ на себя всегда изоморфизм, т. е. степень $\gamma_2(D, f, y)$, которую он определяет, равна 1.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Предположим, что $f\Big|_D$ — не гомеоморфизм. В дальнейших рассуждениях нас интересует случай, когда все континуумы отображения являются точками (т.е. отображение нульмерно), иначе, если хотя бы один континуум не вырожден, то теорема тривиальна: на невырожденном континууме существует три различные точки, переходящие при отображении $f$ в одну.

**1.6.7. Лемма.** *При выполнении условий теоремы не существует открытого множества $W \subset f(D)$ такого, что каждая точка $y \in W$ имеет в точности два прообраза.*

***Доказательство.*** Пусть найдется открытое множество $W \subset f(D)$ такое, что каждая точка $y \in W$ имеет в точности два прообраза. Выберем $y \in W$, тогда $f^{-1}(y)$ состоит из двух точек $x_1$ и $x_2$. Согласно лемме 1.6.5 хотя бы для одной из этих точек, пусть это будет $x_1$, отображение будет квазиоткрытым в $x_1$, т.е. для произвольной окрестности $V \ni x_1$, $y \in \mathrm{Int} f(V)$. Выберем окрестность $V(x_1)$ такой, чтобы $V(x_1) \cap x_2 = \varnothing$ и $f(V(x_1)) \subset W$, а окрестность $V(x_2)$ — такой, чтобы $V(x_1) \cap V(x_2) = \varnothing$ и $f(V(x_2)) \subset f(V(x_1))$. Тогда, согласно строгой двукратности точек из $W$, $f\Big|_{V(x_2)}$ — гомеоморфизм, но тогда и $f\Big|_{V(x_1) \cap f^{-1} f(V(x_2))}$ может быть только гомеоморфизмом. Мы получили, что в некоторых окрестностях точек $x_1$ и $x_2$ $f$ будет локальным гомеоморфизмом, а значит, $\gamma_2(x_1) = \gamma_2(x_2) = 1$. Из "принципа аргумента" следует, что

$$\gamma_2(D, f, y) = [\gamma_2(x_1) + \gamma_2(x_2)] \bmod 2 = 0,$$

а это, как уже показано в лемме 1.6.5, невозможно.

**1.6.8. Определение.** *Точка $x \in D$ называется точкой взаимной однозначности отображения $f : D \to D_1$, если $f^{-1} f(x) = x$.*

**1.6.9. Лемма.** *Пусть $f : D \to N^n$ — нульмерное отображение. Если множество точек взаимной однозначности $E$ плотно в $D$, то $f$ — гомеоморфизм (точнее — топологическое вложение).*

Эта лемма доказана в п. 1.3 (теорема 1.3.18) для монотонных отображений.

**1.6.10. Лемма.** *Если $f$ — нульмерное отображение, для которого выполнены условия теоремы, то множество точек образа, имеющих в точности два прообраза нигде не плотно в $D_1$.*

***Доказательство.*** Пусть лемма неверна. Тогда найдется открытое подмножество $W \subset f(D)$ такое, что в $W$ плотны точки, имеющие в точности два прообраза. Пусть $y \in W$ такая точка, что $f^{-1}(y)$ состоит в точности из двух точек $x_1$ и $x_2$. Как и в лемме 1.6.7, выберем для этих точек окрестности $V(x_1)$ и $V(x_2)$ такие, что

$y \in \mathrm{Int} f\left(V\left(x_i\right)\right)$, $V\left(x_1\right) \cap V\left(x_2\right) = \varnothing$ и $f\left(V\left(x_2\right)\right) \subset f\left(V\left(x_1\right)\right)$. В силу плотности точек с двумя прообразами в $f\left(V\left(x_2\right)\right)$ (заметим, что нульмерное отображение $f$ не понижает размерности) ограничение $f\Big|_{V(x_2)}$ имеет плотное множество точек взаимной однозначности и из леммы 1.6.9 следует, что $f\Big|_{V(x_2)}$ — гомеоморфизм. Но тогда, согласно аналогичным рассуждениям, и ограничение $f\Big|_{V(x_1)\cap f^{-1}f(V(x_2))}$ — гомеоморфизм. Мы получили, что в некоторых окрестностях точек $x_1$ и $x_2$ отображение локально гомеоморфно. Отсюда следует, что найдутся окрестности точек $x_1$ и $x_2$, соответственно, $V\left(x_1\right)$ и $V\left(x_2\right)$, причем, не нарушая общности рассуждений, такие, что $f\left(V\left(x_1\right)\right) = f\left(V\left(x_2\right)\right)$ и ограничения на эти окрестности — гомеоморфизмы. В силу двукратности $f$ на $f^{-1}(y)$ эти окрестности можно выбрать таким образом, чтобы

$$f\left(V\left(x_i\right)\right) \cap f\left(D \setminus \left(V\left(x_1\right) \cup V\left(x_2\right)\right)\right) = \varnothing, \qquad i = 1, 2.$$

И значит мы получили, что каждая точка из открытого множества $f\left(V\left(x_i\right)\right)$ имеет в точности два прообраза, что по лемме 1.6.7, невозможно. Лемма 1.6.10 доказана.

Вернемся к доказательству теоремы.

Из леммы 1.6.9 следует, что если отображение $f$ не гомеоморфизм, то оно не может иметь плотного в $D$ множества точек взаимной однозначности. Легко видеть, в силу нульмерности, что тогда образ точек взаимной однозначности не может быть плотен в $D_1$. Значит, найдется открытое множество $W \subset D_1$ такое, что каждая точка из $W$ имеет по крайней мере два прообраза. Предположим, что $\dim A \leq n-1$, тогда точки с двумя прообразами всюду плотны в $W$. Но это невозможно согласно лемме 1.6.10. Следовательно, наше предположение, что $\dim A \leq n-1$, — неверно.

Теорема доказана.

Напомним, что $n$-мерный лист Мебиуса получается из $n$-мерного кольца $A^n : \frac{1}{2} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$ идентификацией антиподальных точек сферы $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

Положительный ответ на оба вопроса, сформулированные в начале параграфа, содержится в простом следствии из доказанной теоремы.

**1.6.11. Следствие.** *Пусть $f$ — непрерывное отображение $n$-мерного листа Мебиуса $M^n$ в единичный шар $Q^n$ такое, что $f$ отображает границу $M^n$ на границу $Q^n$ со степенью 1.*

*Тогда $f(M^n) = Q^n$ и найдется точка $y \in Q^n$, имеющая по меньшей мере три прообраза.*

*Если же отображение $f$ нульмерно, то множество точек $y \in Q^n$, которые имеют не меньше трех прообразов, имеет размерность $n$.*

***Доказательство.*** Рассмотрим лист Мебиуса $M_1^n$, полученный из кольца $A_1^n : \frac{1}{3} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$ идентификацией антиподальных точек сферы $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, и шар $Q_1^n : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 2$.

Очевидно, что $\operatorname{Int} M_1^n \supset M^n$ и $\operatorname{Int} Q_1^n \supset Q^n$, кроме того,

$$M_1^n \backslash M^n = B^n : \frac{1}{3} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \frac{1}{2}, \quad Q_1^n \backslash Q^n = C^n : 1 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 2.$$

Точки кольца $B^n$ можно однозначно выразить в координатах $(x, r)$, где $x$ принадлежит сфере $\partial M^n$, а $\frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}$, что аналогично $(y, R)$ для точек $C^n$, $y \in S^{n-1} = \partial Q^n$, $1 \leq R \leq 2$.

Пусть $\varphi$ — некоторое гомеоморфное отображение отрезка $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ на отрезок $[1, 2]$ такое, что $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = 2$. Продолжим отображение $f$ до отображения $f_1 : M_1^n \to Q_1^n$ следующим образом:

$$f_1\Big|_{M^n} = f,$$

$$f_1(x, r) = (f(x), \varphi(r)), \quad (x, r) \in B^n.$$

Очевидно, что $f_1(\partial M_1^n) = S_1^{n-1} = \partial Q_1^n$, $f_1\Big|_{\partial M_1^n}$ имеет степень 1, $f_1(\partial M_1^n) \cap f_1(\operatorname{Int} M_1^n) = \varnothing$ и $f_1(M_1^n \backslash M^n) \cap f_1(M^n) = \varnothing$. Значит выполнены все условия теоремы 1.6.5 применительно к отображению $f_1$, так как отображение $f_1\Big|_{\partial M_1^n}$ степени 1 индуцирует изоморфизм

$$f_1^* : H_c^{n-1}(f_1(\partial M_1^n); \mathbb{Z}_2) \to H_c^{n-1}(\partial M_1^n; \mathbb{Z}_2)$$

групп когомологий. Заметим, что $M_1^n$ не гомеоморфно $Q_1^n$, поэтому для отображения $f_1$ следствие доказано. Предположим, тем не менее, что для $f = f_1\Big|_{M^n}$ следствие не верно. Тогда на $Q^n$ всюду плотны точки, имеющие не больше двух прообразов, но точки, имеющие в точности два прообраза, согласно лемме 1.6.10, не могут быть плотными ни в какой подобласти $Q_1^n$, в том числе и в $Q^n$, так как в противном случае они были бы точками с двумя прообразами для отображения $f_1$, поскольку $f_1\left(M_1^n \backslash M^n\right) \cap f_1\left(M^n\right) = \varnothing$. Но тогда в $Q^n$ плотны точки с одним прообразом. Значит, по лемме 1.6.9, $f\Big|_{f^{-1}(Q^n \backslash S^{n-1})} : f^{-1}\left(Q^n \backslash S^{n-1}\right) \to Q^n \backslash S^{n-1}$ — гомеоморфизм. Множество $f^{-1}\left(S^{n-1}\right)$ нигде не плотно $M^n$, так как нульмерное отображение $f$ не понижает размерности. Из этого вытекает, что множество $f^{-1}\left(Q^n \backslash S^{n-1}\right)$ плотно в $\operatorname{Int} M^n$, т. е. в $\operatorname{Int} M^n$ плотно множество точек взаимной однозначности отображения $f$. Согласно лемме 1.6.9 отображение $f\Big|_{\operatorname{Int} M^n}$ — гомеоморфизм, что невозможно, так как лист Мебиуса не гомеоморфен шару.

Следствие доказано.

Аналогично теореме 1.6.5, легко доказать следующее утверждение для отображений, ацикличных в размерностях, отличных от нулевой.

**1.6.12. Теорема.** *Пусть $f : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — собственное, ацикличное в размерностях, отличных от нуля на* $\operatorname{Int} D$, *отображение такое, что:*

1) $f\left(\partial D\right) \cap f\left(\operatorname{Int} D\right) = \varnothing$;

2) $H_c^{n-1}\left(\partial D; \mathbb{Z}_2\right) \neq 0$;

3) *гомоморфизм* $f_0^* : H_c^{n-1}\left(f(\partial D); \mathbb{Z}_2\right) \to H_c^{n-1}\left(\partial D; \mathbb{Z}_2\right)$, *индуцированный ограничением* $f\Big|_{\partial D}$, *есть изоморфизм.*

*Тогда либо $f\Big|_D$ — ацикличное отображение, либо существует множество $A \subset D_1$, $\dim A = n$ такое, что если $y \in A$, то $f^{-1}(y)$ состоит не менее чем из трех компонент.*

**1.6.13. Лемма.** *Пусть $f : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — непрерывное отображение замкнутых областей, такое что $f(\partial D) \cap f(D) = \varnothing$. Тогда либо ограничение $f\Big|_D$ — гомеоморфизм, либо существует точка в обра-*

*зе, имеющая не меньше двух прообразов, если же ограничение* $f\Big|_D$ *— нульмерно, то во втором случае множество точек, имеющих не меньше двух прообразов имеет полную размерность, т.е. содержит открытое в* $D_1$ *подмножество.*

***Доказательство.*** Естественно предположить, что ограничение $f\Big|_D$ — нульмерно и не является гомеоморфизмом, так как в противном случае выполнено одно из утверждений леммы. В силу того, что нульмерное отображение не понижает размерности, существует точка $y \in \operatorname{Int} f(D)$ такая, что $f^{-1}(y)$ содержит не менее двух точек. Пусть точки $x_1$ и $x_2 \in f^{-1}(y)$.

Рассмотрим непересекающиеся окрестности этих точек $U\left(x_1\right)$ и $U\left(x_2\right)$; очевидно, что образы $f\left(U\left(x_1\right)\right)$ и $f\left(U\left(x_2\right)\right)$ имеют общие точки (по крайней мере точку $y$).

Если множество $f\left(U\left(x_1\right)\right) \bigcap f\left(U\left(x_2\right)\right)$ содержит открытое множество $V$, то оно и будет искомым, поскольку каждая его точка имеет как минимум два прообраза: один в $U\left(x_1\right)$, другой — в $U\left(x_2\right)$. Если же внутренность пересечения $f\left(U\left(x_1\right)\right) \bigcap f\left(U\left(x_2\right)\right)$ пуста, то для произвольной окрестности $V(y)$ точки $y$ ограничение $f$ на множество $W_1 = U\left(x_1\right) \bigcap f^{-1}\left(V(y)\right)$ не может быть открытым в точке $x_1$ отображением и отображаться на всю окрестность $V(y)$, однако в силу собственности $f$, ограничение его на множество $W_1$ замкнуто. Следовательно, образ $f\left(W_1\right)$ будет замкнутым подмножеством окрестности $V(y)$.

Отсюда вытекает, что отображение $f$ индуцирует тривиальное отображение групп когомологий

$$f_1^* : H^n\left(\overline{V(y)}, \partial\overline{V}\right) \to H^n\left(\overline{W_1}, \partial\overline{W_1}\right).$$

Кроме этого, образ множества $W_1$ содержит внутренние точки. Выберем одну из таких точек $y_0$ и некоторую окрестность $G\left(y_0\right)$ этой точки, лежащую внутри $V(y)$. Внутри этого множества не может быть плотного множества точек, имеющих по одному прообразу. В противном случае, в соответствии с леммой 1.6.9 ограничение $f\Big|_{f^{-1}(G(y_0))}$ было бы гомеоморфизмом. Но тогда ограничение отображения $f\Big|_{f^{-1}(G(y_0))}$ индуцирует изоморфизм групп когомологий

$$f_3^* : H^n\left(\overline{G(y_0)}, \partial\overline{G(y_0)}\right) \to H^n\left(\overline{f^{-1}(G(y_0))}, \partial f^{-1}\left(\overline{G(y_0)}\right)\right),$$

что противоречит коммутативной диаграмме групп когомологий

$$\begin{tikzcd}
H^n\left(\overline{G(y_0)}, \partial\overline{G(y_0)}\right) \arrow[d, "f_3^*", "\approx"'] & H^n\left(\overline{V}, \overline{V \setminus G}\right) \arrow[l, "i^*"', "\approx"] \arrow[r, "i_1^*", "\approx"'] \arrow[d, "f_2^*"] & H^n\left(\overline{V}, \partial V\right) \approx \mathbb{Z} \arrow[d, "f_1^*"] \\
H^n\left(\overline{f^{-1}(G(y_0))}, \partial f^{-1}\left(\overline{G(y_0)}\right)\right) & H^n\left(\overline{W}, W \setminus f^{-1}(G)\right) \arrow[l, "j^*"', "\approx"] \arrow[r, "j_1^*", "\approx"'] & H^n\left(\overline{W}, \partial W\right)
\end{tikzcd}$$

в которой изоморфизмы $i^*$, $i_1^*$, $j^*$, $j_1^*$ получаются как гомоморфизмы, соответствующие теоремам о вырезании [202]. С одной стороны, $f_1^*$ — тривиальный гомоморфизм, а с другой, $f_1^* = j_1^*\left(j^*\right)^{-1} f_3^*\left(i_1^*\right)^{-1}$ — изоморфизм ненулевой группы. И значит, внутри $V(y)$ существует открытое всюду плотное множество точек, имеющих не меньше двух прообразов. Лемма доказана.

**1.6.14. Следствие.** *Если $f : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — нульмерное отображение нулевой степени, то в образе существует открытое множество, каждая точка которого имеет не менее двух прообразов.*

**1.6.15. Лемма.** *Пусть $f : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — непрерывное отображение областей степени $k$ такое, что $f(\partial D) \cap f(D) = \varnothing$. Тогда множество точек образа, имеющих не менее $|k|$ прообразов, содержит открытое всюду плотное в образе множество.*

***Доказательство.*** Пусть существует открытое в образе подмножество $V$ точек, каждая из которых имеет менее чем $|k|$ точек в прообразе. Тогда отображение $f$ — конечнократное отображение, в каждой точке которого существует локальная степень отображения, и поэтому множество ветвления $B_f$ (множество точек, в которых $f$ не будет локальным гомеоморфизмом) имеет размерность не выше чем $n-1$ [267]и образ $f\left(B_f\right)$ — нигде не плотен в образе. Следовательно, существует точка $y \in V \setminus f\left(B_f\right)$ такая, что в каждой точке прообраза $x \in f^{-1}(y)$ отображение $f$ — локальный гомеоморфизм и степень отображения не может равняться $k$, так как прообразов точки $y$ меньше чем $|k|$ и в каждой точке $x \in f^{-1}(y)$ локальная степень $|\gamma(x)| = 1$. Лемма доказана.

**1.6.16. Теорема.** *Пусть $f : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — непрерывное отображение областей степени $k$ такое, что $f(\partial D) \cap f(D) = \varnothing$. Тогда либо $f$ — внутреннее отображение, либо существует точка, имеющая не меньше чем $|k| + 2$ прообраза. Если же $f$ — нульмерное отображение, то во втором случае множество точек, имеющих не менее чем $|k| + 2$ прообраза, имеет полную размерность.*

***Доказательство.*** Как и в лемме 1.6.13, не нарушая общности, можно считать, что $f$ — нульмерное отображение. Дальнейшее доказательство проведём по индукции. При $k = 0$ теорема доказана в лемме 1.6.13, при $|k| = 1$ — в теореме 1.6.5. Предположим, что теорема доказана для $|k| = m$ и докажем её для $|k| = m + 1$.

Пусть каждая точка некоторого открытого множества в образе имеет ровно $|k|$ прообразов. Тогда, аналогично лемме 1.6.15, в каждой точке прообраза локальная степень $|\gamma(x)| = 1$. Более того, во всех точках она должна иметь один знак, так как в соответствии с "принципом аргумента" для локальной степени, получаем противоречие. Но тогда $f\Big|_{f^{-1}(V)}$ — внутреннее отображение. Если $f\Big|_{f^{-1}(V)}$ не является внутренним на всех компонентах, то разобьем прообраз $V$ на объединение двух множеств. Пусть $W_1$ — объединение компонент прообраза, где ограничение $f$ — внутреннее отображение. Тогда $f\Big|_{W_1}$ — $f : W_1 \to V$ — внутреннее отображение кратности $|k_1|$, $|k_1| \leq |k|$, имеющее в $V$ плотное открытое множество точек, для каждой из которых существует ровно $|k_1|$ прообразов. Что же касается ограничения $f$ на множество $W_2 = f^{-1}(V) \setminus W_1$, не будет внутренним и будет иметь степень $k_2 = k - k_1$. Тогда, согласно предположению индукции, существует открытое подмножество $U \subset V$, имеющее для каждой точки $y \in U$ не менее чем $|k_2| + 2$ прообраза. Следовательно, для некоторого открытого подмножества $U_0 \subset U$ каждая точка имеет $|k_1|$ прообраз в $W_1$ и не менее чем $|k_2| + 2$ прообраза в $W_2$, и всего — не менее чем

$$|k_1| + |k_2| + 2 \geq |k_1 + k_2| + 2 = |k| + 2$$

прообраза. Теорема доказана.

## 1.7 Исторические ссылки и комментарии

Многие глубокие свойства аналитических функций отражаются на топологических свойствах соответствующих им римановых поверхностей и множеств. Понятие римановой поверхности, введенное в выдающейся работе Б. Римана [332], лежит в основе многих классических исследований геометрической теории функций. Плодотворное развитие этого направления связано с работами Ф. Клейна, А. Пуанкаре, П. Кёбе [322]. Строгую законченность теория римановых поверхностей получила лишь после развития теории топологических многообразий на основании понятия абстрактной римановой поверхности, предложенного Г. Вейлем [352].

Исторически существенное проникновение топологических методов в теорию функций связано с работами К. Каратеодори и П. Кёбе [262] по теории простых концов. Топологический аспект этой теории, ее связь с конформно-инвариантными компактификациями области глубоко изучены в 70 – 80 гг. прошлого века в работах Г. Суворова и его учеников [166, 184, 207–209].

С. Стоилов [210, 211] выделил топологический класс отображений, полностью описывающих топологические характеристики голоморфных отображений одного комплексного переменного. В его известной теореме утверждается, что произвольное внутреннее (т. е. открытое и нульмерное) отображение одного двумерного ориентируемого многообразия на другое есть суперпозиция гомеоморфизма и мероморфного отображения; в частности, прообраз любой точки есть изолированное множество, причем вблизи каждой точки характер ориентации отображения один и тот же. Соединение идей С. Стоилова с идеями Г. Бора, Г. Лумана, Д. Меньшова [258, 313] позволило Ю. Трохимчуку [222] построить стройную теорию множеств моногенности произвольных непрерывных функций на комплексной плоскости и, опираясь на нее, найти минимальные локально-геометрические условия аналитичности функций. Многомерные аналоги этой теории построены в работах А. Бондаря и его учеников [81–83, 193, 195]. Описание множеств моногенности липшицевых функций, существенно использующее многозначные отображения, осуществили один из авторов представляемой работы совместно с М. Атабаев [130, 131].

При исследовании изолированных критических точек функций широко привлекается топологический аппарат теории Морса [171, 180] в вещественном случае и теории Пикара–Лефшеца [12] — в комплексном.

Проблема подсчета вычетов, начала исследования которой в многомерном случае заложено А. Пуанкаре [322], а затем продолжено в работах А. Мартинелли [316], А. Южакова [245], А. Циха [230], использует двойственность Александера–Понтрягина, понятие степени отображения и другие топологические идеи.

Особенно результативное проникновение топологических методов в теорию функций многих комплексных переменных базируется на аппарате теории пучков, который позволил придать теории Ока–Картана современную форму. На этом фундаменте проводили свои исследования Г. Грауэрт и Р. Реммерт [286] по комплексным аналитическим пространствам. Достижения локальной теории комплексно-аналитических множеств описаны в известных монографиях М. Эрве, Р. Ганинга и Х. Росси [90, 244]. Важнейшие достижения в геометрическом подходе к теории комплексных аналитических множеств и описание их глобальных свойств изложены в монографии Е. Чирки [237]. Кратность отображения областей на многообразиях — важная область исследований комплексного анализа и теории отображений. Особенно интересны исследования конечнократных отображений, которым посвящена обширная литература. Выделим из неё, не претендуя на полноту, работы П. Черча и Т. Хемингсена [263–269], А. Чернавского [232–235], Ф. Миодушевского [319], Ю. Вяйсяля [349]. Другие ссылки можно найти в библиографии цитируемых работ.

С этой тематикой тесно связаны вопросы однолистности, т. е. гомеоморфности ограничения отображения на внутренность области. Результаты разделов 1.4 и 1.5 инспирированы результатом А. Чернавского [235] и получены в работах [120–125, 127–129]. Основные утверждения раздела 1.6 впервые получены в работах [126,133]. Они связаны с решениями ряда проблем, сформулированных в работе А. Косинского [309]. Главный метод исследования первой главы — активное использование аппарата локальной степени отображения. Основные результаты, на которых построена теория локальной степени отображения нульмерного отображения, базируются на работах Л. Кудрявцева [144], Ю. Трохимчука, А. Бондаря [223–226]. Некоторые обобщения результатов цитируемых авторов на отображения, допускающие отличные от точечных компоненты прообразов точек получены одним из авторов [123]. В монографии они занимают разделы 1.1 – 1.3. Далее они используются для получения основных результатов главы.

Ниже приводится перечень топологических результатов, используемых в первой главе. Для углублённого знакомства с этими понятиями следует обратиться к соответствующей литературе [202, 206].

*Парой топологических пространств* $(X, A)$ называется пара, состоящая из топологического пространства $X$ и его подпространства $A \subset X$. *Отображением пар топологических пространств* $f : (X, A) \to (Y, B)$ называется непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что $f(A) \subset B$. Если подпространство $A$ пусто $(A = \varnothing)$, то различать пару $(X, A)$ и пространство $X$ не будем.

Два отображения $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ называются *гомотопными*, если есть такое отображение пары декартовых произведений (гомотопия)

$$h : (X \times [0,1], A \times [0,1]) \to (Y, B),$$

что $h(x, 0) = f(x)$ и $h(x, 1) = g(x)$ для всех $x \in X$. Гомотопия называется изотопией, если для каждого $t$ отображения $h(x, t)$ гомеоморфны.

Непрерывное отображение $g : Y \to X$ называется гомотопически обратным непрерывному отображению $f : X \to Y$, если композиции $gf$ и $fg$ гомотопны тождественным отображениям пространств $X$ и $Y$ соответственно. Непрерывное отображение, обладающее гомотопически обратным, называется *гомотопической эквивалентностью*. Гомотопическая эквивалентность разбивает топологические пространства на классы гомотопически эквивалентных пространств. Эти классы называются гомотопическими типами.

Пусть каждой паре $(X, A)$ сопоставлено семейство абелевых групп $H^p(X, A)$, $p$ — целое, а всякому отображению пар $f : (X, A) \to (Y, B)$ — семейство гомоморфизмов $f^*(Y, B) \to H^p(X, A)$. Далее, пусть для каждого пространства $A \subset X$ задан некоторый гомоморфизм $\delta : H^p(A) \to H^{p+1}(X, A)$. Эти три объекта: $H^p$, $f^*$, $\delta$ должны удовлетворять следующей системе аксиом I, именно:

**Аксиома 1.** *Если $f : (X, A) \to (X, A)$ — тождественное отображение пространства $X$, то $f^*$ — тождественное отображение группы $H^p(X, A)$.*

**Аксиома 2.** *Если* $h = gf$, *то* $h^* = f^*g^*$.

**Аксиома 3.** *Если* $f$ *гомотопно* $g$, *то* $f^* = g^*$.

**Аксиома 4.** *Для любого отображения пар* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
H^p(B) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f^*"'] & H^{p+1}(Y, B) \arrow[d, "f^*"] \\
H^p(A) \arrow[r, "\delta"] & H^{p+1}(X, A),\ f^*\delta = \delta f^*.
\end{tikzcd}$$

**Аксиома 5.** *Пусть для пары* $(X, A)$ *открытое подмножество* $U$ *таково, что* $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$, *а отображение вырезания* $j : (X \setminus U, A \setminus U) \subset (X, A)$ *индуцирует изоморфизм*

$$j^* : H^p(X, A) \approx H^p(X \setminus U, A \setminus U).$$

**Аксиома 6.** *Когомологическая последовательность пары* $(X, A)$, *т. е. последовательность*

$$\ldots \to H^p(X, A) \to H^p(X) \to H^p(A) \to H^{p+1}(X, A) \to \ldots$$

*точна, т. е. в каждом ее члене образ входящего гомоморфизма равен ядру выходящего.*

Если не оговорено другое, будем рассматривать группы когомологий с коэффициентами в группе целых чисел $\mathbb{Z}$.

**Аксиома 7.** *Для одноточечного пространства* $*$ *имеет место изоморфизм*

$$H^0(*) \approx \mathbb{Z} \quad \textit{и} \quad H^p(*) = 0 \quad \textit{при} \quad p > 0.$$

Иногда для удобства будем использовать приведенные группы когомологий

$$\widetilde{H}^p(*) = 0 \quad \text{для всех} \quad p \geqslant 0.$$

В случае выполнения аксиом 1 – 7 будем говорить, что задана некоторая теория когомологий.

Триадой $(X; A, B)$ называется локально компактное пространство $X$ с двумя замкнутыми подпространствами $A$ и $B$. Для такой триады точна когомологическая последовательность

$$\ldots \xrightarrow{i^*} H^{p-1}(A, A\cap B) \xrightarrow{\delta^*} H^p(X, A\cup B) \xrightarrow{j^*}$$

$$\xrightarrow{j^*} H^p(X, B) \xrightarrow{i^*} \ldots$$

Если в триаде имеет место включение $A \supset B$, то такая триада называется тройкой $(X, A, B)$ и точная последовательность когомологий сводится к последовательности

$$\ldots \xrightarrow{i^*} H^{p-1}(A, B) \xrightarrow{\delta^*} H^p(X, A) \xrightarrow{j^*} H^p(X, B) \xrightarrow{i^*} \ldots$$

Если $M$ — $n$-мерное топологическое многообразие, то для замкнутого подмножества $F \subset M$, $F \neq M$,

$$H^n(F) = 0,$$

а для открытой области $D \subset M$ имеет место

$$H^n(\overline{D}, \partial D) \approx \mathbb{Z}.$$

Если же, аналогично предыдущему, каждой паре $(X, A)$ сопоставлено семейство абелевых групп $H_p(X, A)$, отображению $f : (X, A) \to (Y, B)$ — семейство гомормофизмов $f_* : H_p(X, A) \to H_p(Y, B)$ и подпространству $A \subset X$ — граничный гомормофизм $\partial : H_p(X, A) \to H_{p-1}(A)$, то $H_p$, $f_*$ и $\partial$ должны удовлетворить системе аксиом:

**Аксиома 1′.** *Аксиома 1.*

**Аксиома 2′.** *Если* $h = gf$, *то* $h_* = g_* f_*$.

**Аксиома 3′.** *Аксиома 3.*

**Аксиома 4′.** *Для отображения пар* $\partial f_* = f_* \partial$.

**Аксиома 5′.** $j_*$ *— изоморфизм.*

**Аксиома 6′.** *Точна гомологическая последовательность пары*

$$\ldots \to H_p(X,A) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(A) \to H_{p-1}(X) \to H_{p-1}(X,A) \to \ldots$$

**Аксиома 7′.** *Аксиома 7 из системы аксиом I.*

Тогда говорят, что задана некоторая теория гомологии (под совпадением аксиом понимаем их совпадение при замене $f^*$ на $f_*$, а $H^p(\ldots)$ на $H_p(\ldots)$). Такие теории гомологии и когомологий, вообще говоря, неединственны, но в монографии используется только тот факт, что они существуют, удовлетворяют перечисленным свойствам и, более того, существуют теории, для которых справедливо следующее утверждение.

**Теорема** (двойственность Александера) [202]. *Пусть $A$ — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$.*

*Тогда для всех чисел $p$ имеет место изоморфизм*

$$\widetilde{H}_p(\mathbb{R}^n \setminus A) \approx H^{n-p-1}(A).$$

Зададим в $(p+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p+1}$ $p$-мерный стандартный симплекс $\sigma^p$ как множество точек

$$\{x = (x_0, \ldots, x_p) : x_0 + x_1 + \ldots + x_p = 1,\, x_i \geqslant 0\}.$$

Определим отображение стандартного симплекса $\sigma^{p-1}$ на грань $\sigma^p$ следующим образом. Пусть $\sigma_i^{p-1}$ — грань $\sigma^p$, задаваемая условием $x_i = 0$. Назовем вершиной $e_m$ точку с координатой $x_m = 1$ и положим

$$h_i(e_m) = e_m \,(m < i), \quad h_i(e_m) = e_{m+1},\, i \leqslant m \leqslant p-1.$$

Далее доопределим $h_i$ в отдельных точках $\sigma^{p-1}$ как аффинное отображение, принимающее заданное значение в вершинах. Назовем $p$-мерным симплексом топологического пространства $X$ любое непрерывное отображение $t^p : \sigma^p \to X$. Назовем $p$-мерной цепью $X$ формальную конечную линейную комбинацию с целочисленными коэффициентами симплексов $t_i^p$:

$$C_p = \sum n_i t_i^p.$$

Множество $|c_p| = \cup t_i^p(\sigma^p) \subset X$ называют телом цепи. Такие цепи образуют свободную абелеву группу $p$-мерных цепей $C_p(X)$. Элементы прямой суммы $C(X) = \oplus C_p(X)$ назовем цепями. Граничный гомоморфизм $\partial$ достаточно задать на образующих. Положим

$$\tau_i t^p = t^p \eta_i, \quad \partial t^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \tau_i t^p.$$

Легко проверить, что $\partial\partial t^p = 0$, и значит, $\partial^2 = 0$. Очевидно, $\partial(C_p(X)) \subset C_{p-1}(X)$. Определим подгруппы

$$Z_p(X) = \operatorname{Ker}\partial \cap C_p(X) \subset C_p(X),$$

$$Z(X) = \oplus Z_p(X) \subset C(X),$$

$$B_p(X) = \operatorname{Im}\partial \cap C_p(X) \subset C_p(X),$$

$$B(X) = \oplus B_p(X) \subset C(X),$$

где Ker, Im — ядро и образ гомоморфизма соответственно.

Группу $Z_p(X)$ называют группой $p$-мерных циклов, $B_p(X)$ — группой $p$-мерных границ. Геометрически циклы можно представлять себе как замкнутые ориентированные поверхности, а границы — как границы ориентированных поверхностей.

Факторгруппа

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$$

дает пример группы гомологий пространства $X$.

**Лемма** [202]. *Если задана коммутативная диаграмма абелевых групп и гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd}
G_5 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_5"'] & G_4 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_4"] & G_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_3"'] & G_2 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"] & G_1 \arrow[d, "\gamma_1"'] \\
H_5 \arrow[r] & H_4 \arrow[r] & H_3 \arrow[r] & H_2 \arrow[r] & H_1.
\end{tikzcd}$$

*в которой каждая строка точна, и $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_4$ и $\gamma_5$ — изоморфизмы, то $\gamma_3$ — также изоморфизм.*

# ГЛАВА 2

# ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

## 2.1 Основные обозначения и определения

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ — плоскость комплексных чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — её одноточечная компактификация и $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Пусть $r(B, a)$ обозначает внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см., например, [109, 112, 229]), $\operatorname{cap} E$ — логарифмическую емкость множества $E$ (см. [109, 112, 229]),

$$U_\rho = \{w \in C : |w| < \rho\}, \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \quad U_1 =: U$$

и $\chi(t) = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$.

**2.1.1. Квадратичные дифференциалы.** Приведем необходимые сведения из теории квадратичного дифференциала — одного из основных понятий в настоящей работе. Детальное изложение теории и доказательства приведенных ниже теорем читатель сможет найти в классической монографии Дж. Дженкинса [104].

**Определение 2.1.1.** *Пусть $\mathfrak{R}$ — (ориентированная) риманова поверхность (открытая или замкнутая). Будем говорить, что на $\mathfrak{R}$ определен квадратичный дифференциал, если каждому локальному параметру $z$ поверхности $\mathfrak{R}$ сопоставлена некоторая функция $Q(z)$, мероморфная в соответствующей окрестности и удовлетворяющая следующему условию, если $z^*$ — другой локальный параметр для $\mathfrak{R}$ и $Q^*(z^*)$ — такая же функция для $z^*$, причем окрестности, соответствующие $z$ и $z^*$, пересекаются, то в общих точках этих окрестностей*

$$Q^*(z^*) = Q(z)\left(\frac{dz}{dz^*}\right)^2.$$

Квадратичные дифференциалы будут обозначаться символом $Q(z)dz^2$.

Точка $P$ поверхности $\mathfrak{R}$ называется нулем или полюсом порядка $k$ дифференциала $Q(z)dz^2$, если для каждого локального параметра $z$

она изображается точкой, обладающей соответствующим свойством относительно $Q(z)$. Нули и полюсы $Q(z)dz^2$ называются критическими точками этого квадратичного дифференциала. Нули и простые полюсы называются конечными критическими точками; их совокупность будет обозначаться через $\mathcal{C}$. Множество всех полюсов порядка не ниже второго будет обозначаться через $\mathcal{H}$.

Очевидно, что критические точки квадратичного дифференциала изолированны.

**Определение 2.1.2.** *Пусть* $\mathfrak{R}$ *— риманова поверхность,* $Q(z)dz^2$ *— квадратичный дифференциал, заданный на* $\mathfrak{R}$*. Максимальная регулярная кривая, на которой* $Q(z)dz^2 > 0$*, называется траекторией дифференциала* $Q(z)dz^2$*. Максимальная регулярная кривая, на которой* $Q(z)dz^2 < 0$*, называется ортогональной траекторией дифференциала* $Q(z)dz^2$*.*

Легко видеть, что траектории и ортогональные траектории внутренним образом связаны с квадратичным дифференциалом, т. е. они не зависят от выбора локальных параметров.

Если $\mathfrak{R}$ — риманова поверхность, а $Q(z)dz^2$ — заданный на $\mathfrak{R}$ квадратичный дифференциал, то на множестве $\mathfrak{R}\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{H})$ локально определен интеграл $\int\big(Q(z)\big)^{\frac{1}{2}}dz$ как регулярная функция, не зависящая от выбора локальных параметров. Но, вообще говоря, этот интеграл не будет, конечно, однозначно определен в целом.

**Теорема 2.1.1**. *Какова бы ни была точка* $P$ *множества* $\mathfrak{R}\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{H})$*, существует окрестность* $N$ *этой точки на* $\mathfrak{R}$ *и гомеоморфное отображение* $N$ *на круг* $|w| < 1$ $(w = u + iv)$*, при котором максимальная открытая дуга некоторой траектории из* $N$ *переходит в отрезок, где* $v$ *постоянна.*

**Следствие 2.1.1.** *Через каждую точку из* $\mathfrak{R}\setminus(\mathcal{C}\cup\mathcal{H})$ *проходит траектория дифференциала* $Q(z)dz^2$*, являющаяся либо открытой дугой, либо жордановой кривой на* $\mathfrak{R}$*.*

**Теорема 2.1.2**. *Какова бы ни была точка* $P \in \mathcal{C}$ *порядка* $\mu$ $(\mu > 0$*, если* $P$ *— нуль;* $\mu = -1$*, если* $P$ *— простой полюс), существует окрестность* $N$ *этой точки на* $\mathfrak{R}$ *и гомеоморфное отображение* $N$ *на круг* $|w| < 1$*, при котором максимальная дуга каждой траектории из* $N$ *переходит в открытую дугу, на которой*

*$Im\,w^{\frac{\mu+2}{2}}$ постоянна. Существует $\mu+2$ траектории с концами в $P$ и с предельными касательными направлениями, составляющими друг с другом равные углы величины $\frac{2\pi}{\mu+2}$.*

**Теорема 2.1.3**. *Пусть точка $P \in \mathcal{H}$ — полюс порядка $\mu$ ($\mu > 2$). Если некоторая траектория имеет конец в $P$, то она стремится к $P$ по одному из $(\mu-2)$ направлений, расположенных под равными углами $\frac{2\pi}{(\mu-2)}$. Существует окрестность $N$ точки $P$ на $\mathfrak{R}$ со следующими свойствами:*

*1) всякая траектория, проходящая через некоторую точку окрестности $N$ в обоих направлениях, либо стремится к $P$, либо выходит из $N$;*

*2) существует окрестность $N^*$ точки $P$, содержащаяся в $N$ и такая, что всякая траектория, проходящая через некоторую точку из $N^*$, хотя бы в одном из направлений, стремится к $P$, оставаясь в $N^*$;*

*3) если некоторая траектория целиком лежит в $N$ и поэтому в обоих направлениях стремится к $P$, то касательная к этой траектории при приближении к $P$ в соответствующем направлении стремится к одному из двух смежных предельных положений. Жорданова кривая, полученная присоединением к этой траектории точки $P$, ограничивает область $D$, содержащую точки угла, составленного двумя соседними предельными касательными. Касательная к любой траектории, имеющей общие точки с $D$, стремится при приближении к $P$ в двух направлениях соответственно к этим смежным предельным положениям. Область $D$ отображается при помощи подходящей ветви функции $\zeta = \int \big(Q(z)\big)^{\frac{1}{2}} dz$ на полуплоскость $Im\zeta > c$ ($c$ — вещественное число);*

*4) Для каждой пары смежных предельных положений существует траектория, обладающая свойствами, описанными в 3).*

**Теорема 2.1.4**. *Пусть точка $P \in \mathcal{H}$ — полюс второго порядка, и $z$ — локальный параметр, причем точке $P$ соответствует $z = 0$.*

*Пусть $\big[Q(z)\big]^{-\frac{1}{2}}$ имеет (при некотором выборе ветви корня) следующее разложение в окрестности точки $z = 0$ :*

$$\big[Q(z)\big]^{-\frac{1}{2}} = (a+ib)z\{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots\}, \qquad (2.1.1)$$

*где $a$, $b$ — вещественные, а $b_1$, $b_2$, ... — комплексные постоянные. Строение образов траекторий дифференциала $Q(z)dz^2$ в плоскости $z$ определяется тем, какой из следующих трех случаев имеет место.*

*Случай 1: $a \neq 0$, $b \neq 0$. Для достаточно малого $\alpha > 0$ образ всякой траектории, пересекающий круг $|z| < \alpha$, в одном направлении стремится к $z = 0$, а в другом — выходит из круга $|z| < \alpha$. И модуль, и аргумент $z$ изменяются монотонно на образе траектории в круге $|z| < \alpha$. Всякий образ траектории закручивается около точки $z = 0$ и ведет себя асимптотически, как логарифмическая спираль.*

*Случай 2: $a \neq 0$, $b = 0$. Для достаточно малого $\alpha > 0$ образ всякой траектории, пересекающий круг $|z| < \alpha$, в одном направлении стремится к $z = 0$, а в другом — выходит из круга $|z| < \alpha$. Модуль $z$ изменяется монотонно на образе траектории в круге $|z| < \alpha$. Разные образы траекторий имеют разные предельные направления в точке $z = 0$.*

*Случай 3: $a = 0$, $b \neq 0$. Для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\alpha(\varepsilon) > 0$, что при $0 < \alpha \leqslant \alpha(\varepsilon)$ образ траектории, пересекающий окружность $|z| = \alpha$, представляет собой жорданову кривую, лежащую в круговом кольце $\alpha(1+\varepsilon)^{-1} < |z| < \alpha(1+\varepsilon)$.*

Тейхмюллер [347] первым описал локальное строение траекторий квадратичного дифференциала, не давая доказательства, а А. Шеффер и Д. Спенсер [338] — первое подробное исследование при дополнительном несущественном условии гиперэллиптичности квадратичного дифференциала.

При анализе структуры в целом траекторий квадратичного дифференциала удобно рассмотреть конечные ориентированные римановы поверхности. Конечная ориентированная риманова поверхность $\mathfrak{R}$ имеет конечный род и может иметь конечное число гиперболических граничных компонент. Если такие граничные компоненты действительно имеются, то существуют соответствующие граничные униформизирующие параметры, которые отображают граничные окрестности поверхности $\mathfrak{R}$ на множества, лежащие в верхней полуплоскости, так что граничные точки $\mathfrak{R}$ во вполне определенном смысле переходят в некоторый сегмент вещественной оси. Конечная ориентированная риманова поверхность конформно эквивалентна области, лежащей на замкнутой римановой поверхности и ограниченной конечным (возможно, нулевым) числом простых замкнутых аналитических кривых. Исходя из этого или оставаясь на абстрактной точке зрения, можем считать, что граничные точки $\mathfrak{R}$ (если $\mathfrak{R}$ не замкнута) присоединены к $\mathfrak{R}$; полученный образ будем обозначать символом $\overline{\mathfrak{R}}$.

**Определение 2.1.3.** *Квадратичным дифференциалом на конечной ориентированной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем называть квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$ в смысле определения 2.1.1, который удовлетворяет следующему условию: в терминах граничного униформизирующего параметра $z$ функция $Q(z)$ оказывается регулярной всюду, за исключением простых полюсов, и вещественной на отрезке вещественной оси, соответствующем граничным точкам $\mathfrak{R}$.*

Множеством $\mathcal{C}$ для квадратичного дифференциала в смысле определения 2.1.3 назовем множество нулей и простых полюсов дифференциала $Q(z)dz^2$ на границе $\mathfrak{R}$. Граничные кривые, на которых $Q(z)dz^2 > 0$, снова назовем траекториями, а те, на которых $Q(z)dz^2 < 0$, — ортогональными траекториями. Если поверхность $\mathfrak{R}$ замкнута, то дополнительное условие определения 2.1.3 излишне.

**Определение 2.1.4.** *Положительным квадратичным дифференциалом $Q(z)dz^2$ на конечной ориентированной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ назовем такой квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, для которого в терминах граничного униформизирующего параметра $z$ функция $Q(z)$ положительна в точках отрезка вещественной оси, соответствующего граничным точкам $\mathfrak{R}$, отличным от нулей $Q(z)$.*

Положительный квадратичный дифференциал регулярен на границе $\mathfrak{R}$. Формулируя общие результаты для конечных ориентированных римановых поверхностей, условимся рассматривать любой дифференциал на замкнутой римановой поверхности как положительный, хотя условие определения 2.1.4 в этом случае бессодержательно.

По-видимому, впервые квадратичные дифференциалы возникли при изучении экстремальных задач в работах М.А. Лаврентьева [158], Г. Гретша [289], М. Шиффера [339, 340]. Фундаментальная роль квадратичных дифференциалов как универсального средства для решения экстремальных задач геометрической теории функций была впервые отмечена О. Тейхмюллером [347], сформулировавшим в 1939 г. принцип, согласно которому решение каждой такой задачи связано с некоторым квадратичным дифференциалом. Этот принцип нашел свое выражение в виде так называемой "общей теоремы о коэффициентах", сформулированной и доказанной позднее Дж. Дженкинсом (см. [104]), которая в дальнейшем дополнялась и уточнялась в работах многих авторов. Другие понятия и результаты, относящиеся к теории квадратичных дифференциалов и их приложениям, а также более подробные исторические комментарии со ссылками на работы перечисленных выше авторов см. в [104, 110, 112, 145, 201, 214, 350].

### 2.1.2. $F$–множества и типы областей (относительно квадратичного дифференциала).

**Определение 2.1.5.** *Множество $\mathcal{K}$ на $\mathfrak{R}$ называется $F$-множеством (относительно $Q(z)dz^2$), если всякая траектория дифференциала $Q(z)dz^2$, пересекающаяся с $\mathcal{K}$, целиком лежит в $\mathcal{K}$.*

**Определение 2.1.6.** *Внутренним замыканием множества точек поверхности $\mathfrak{R}$ будем называть внутренность замыкания этого множества. Внутреннее замыкание множества $\mathcal{K}$ будем обозначать через $\widehat{\mathcal{K}}$.*

Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная ориентированная римановая поверхность, а $Q(z)dz^2$ — квадратичный дифференциал на ней.

**Определение 2.1.7.** *Концевой областью $\mathfrak{F}$ (относительно $Q(z)dz^2$) называется максимальное связное открытое $F$-множество на $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:*

*1) $\mathfrak{F}$ не содержит критических точек дифференциала $Q(z)dz^2$;*

*2) $\mathfrak{F}$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из которых имеет предельную концевую точку в каждом из двух возможных направлений в заданной точке $A \in \mathcal{H}$;*

*3) $\mathfrak{F}$ конформно отображается функцией $\zeta = \int [Q(z)]^{\frac{1}{2}} dz$ на верхнюю или нижнюю полуплоскость плоскости $\zeta$ (в зависимости от выбора знака корня).*

Сразу ясно, что точка $A$ должна быть полюсом дифференциала $Q(z)dz^2$ не ниже третьего порядка.

**Определение 2.1.8.** *Полосообразной областью $\mathfrak{S}$ (относительно $Q(z)dz^2$) называется максимальное связное открытое $F$-множество на $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:*

*1) $\mathfrak{G}$ не содержит критических точек дифференциала $Q(z)dz^2$;*

*2) $\mathfrak{G}$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из которых имеет в некоторой точке $A \in \mathcal{H}$ концевую предельную точку в одном направлении, а в другой (возможно, совпадающей с $A$) точке $B \in \mathcal{H}$ — концевую предельную точку в другом направлении;*

*3) $\mathfrak{G}$ конформно отображается функцией $\zeta = \int (Q(z))^{\frac{1}{2}} dz$ на полосу $a < Im\zeta < b$ ($a$, $b$ — конечные вещественные числа, $a < b$).*

**Определение 2.1.9.** *Круговой областью $\mathfrak{S}$ (относительно $Q(z)dz^2$) называется максимальное связное открытое $F$-множество на $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:*

*1) $\mathfrak{S}$ содержит единственный двойной полюс $A$ дифференциала $Q(z)dz^2$;*

*2) $\mathfrak{S} \setminus A$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из которых представляет собой жорданову кривую, отделяющую $A$ от границы $\mathfrak{S}$;*

*3) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной $c$ функция $w = \exp\left\{c \int (Q(z))^{\frac{1}{2}} dz\right\}$ дополненная значением нуль в точке $A$, отображает $\mathfrak{S}$ конформно на круг $|w| < R$, причем $A$ переходит в точку $w = 0$.*

**Определение 2.1.10.** *Кольцевой областью $\mathfrak{D}$ (относительно дифференциала $Q(z)dz^2$) называется максимальное связное открытое $F$-множество на $\mathfrak{R}$, обладающее следующими свойствами:*

*1) $\mathfrak{D}$ не содержит критических точек дифференциала $Q(z)dz^2$;*

*2) $\mathfrak{D}$ заполнено траекториями дифференциала $Q(z)dz^2$, каждая из которых представляет собой жорданову кривую;*

*3) при надлежащем выборе чисто мнимой постоянной $c$ функция $w = \exp\left\{c \int [Q(z)]^{\frac{1}{2}} dz\right\}$ отображает $\mathfrak{D}$ конформно на круговое кольцо $r_1 < |w| < r_2$ $(0 < r_1 < r_2)$.*

**Теорема 2.1.5**. (Основная структурная теорема). *Пусть $\mathfrak{R}$ — конечная ориентированная риманова поверхность и $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $\mathfrak{R}$, причем исключаются следующие поверхности (и конформно эквивалентные им):*

*1. $\mathfrak{R}$ есть $z$-сфера, $Q(z)dz^2 = dz^2$;*

*2. $\mathfrak{R}$ есть $z$-сфера, $Q(z)dz^2 = \frac{Ke^{i\alpha}dz^2}{z^2}$, $\alpha$ — вещественное, $K$ —*

*положительное;*

*3. $\mathfrak{R}$ есть тор, $Q(z)dz^2$ регулярен на $\mathfrak{R}$.*

*Пусть $\Phi$ обозначает объединение всех траекторий, имеющих предельную концевую точку в некоторой точке множества $\mathcal{C}$. Тогда:*

*1) $\mathfrak{R}\setminus\overline{\Phi}$ состоит из конечного числа концевых, полосообразных, круговых и кольцевых областей;*

*2) каждая такая область ограничена конечным числом траекторий вместе с точками, в которых троектории пересекаются; всякая граничная компонента такой области содержит точку множества $\mathcal{C}$, за исключением круговых или кольцевых областей, граничные компоненты которых могут совпадать с граничной компонентой $\mathfrak{R}$; два граничных элемента полосообразной области, выходящие из точек множества $\mathcal{H}$, разделяют границу на две части, каждая из которых содержит точку множества $\mathcal{C}$;*

*3) каждый полюс дифференциала $Q(z)dz^2$ порядка $m > 2$ имеет окрестность, покрываемую внутренним замыканием $m-2$ концевых областей и конечного числа (возможно, равного нулю) полосообразных областей;*

*4) каждый полюс второго порядка дифференциала $Q(z)dz^2$ имеет либо окрестность, покрываемую внутренним замыканием, конечного числа полосообразных областей, либо окрестность, содержащуюся в круговой области;*

*5) внутреннее замыкание $\widehat{\Phi}$ множества $\Phi$ является $F$-множеством, состоящим из конечного числа областей поверхности $\mathfrak{R}$, каждая из которых имеет конечное число (возможно, равное нулю) граничных компонент;*

*6) каждая граничная компонента такой области является кусочно-аналитической кривой, составленной из траекторий и их предельных концевых точек, лежащих в $\mathcal{C}$.*

**2.1.3. Функция Грина и внутренний радиус области.** Дадим более подробное пояснение понятия внутреннего радиуса области, которое является одним из основных в данной работе.

**Определение 2.1.11.** *Пусть $G$ — область в $\overline{\mathbb{C}}$, $G \neq \overline{\mathbb{C}}$. Функцией Грина области $G$ называется такая вещественная функция $g_G(z,w)$, определенная при всех $z,w \in G$, $z \neq w$, что при каждом* *фиксированном* $w \in G$ *выполнены следующие условия:*

*1) функция* $g_G(z,w)$ *гармонична как функция от* $z$ *в области* $G\backslash\{w\}$*;*

*2) если* $z \to w$*, то* $g_G(z,w) \to +\infty$*, при этом разность* $g_G(z,w) - \log\frac{1}{|z-w|}$ *остается ограниченной для конечного* $w$*, и разность* $g_G(z,\infty) - \log|z|$ *ограничена для* $w = \infty$*;*

*3) при приближении к границе* $\partial G$ *функция* $g_G(z,w)$ *стремится к нулю.*

Если для области $G$ существует функция Грина (последнее, например, имеет место в случае, когда $\partial G$ состоит из конечного числа замкнутых жордановых кривых), то из приведенного определения вытекает симметричность и положительность функции $g_G$ (см., например, [94]):

$$g_G(z,w) = g_G(w,z) > 0 \quad \forall\, z,w \in G, \quad z \neq w.$$

Произвольную область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ всегда можно исчерпать последовательностью областей $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$, для каждой из которых существует функция Грина. В этом случае из теоремы Харнака о возрастающих последовательностях гармонических функций [94] следует, что для каждого $w \in G\backslash\{\infty\}$ последовательность гармонических функций

$$h_{G_k,w}(z) := g_{G_k}(z,w) - \log\frac{1}{|z-w|}, \quad z \in G\backslash\{w\},$$

доопределенная по непрерывности в точке $w$, равномерно сходится на компактных подмножествах области $G$ при $k \to \infty$ либо к $+\infty$, либо к некоторой гармонической функции $h_{G,w}(z)$, которая не зависит от выбора исчерпывающих областей $G_1, G_2, \ldots$. В последнем случае функция

$$g_G(z,w) := h_{G,w}(z) + \log\frac{1}{|z-w|}$$

называется обобщенной функцией Грина области $G$, а величина $r(G,w) := \exp\left(h_{G,w}(w)\right)$ называется *внутренним радиусом области* $G$ *относительно точки* $w$ (см. [110, 229]). В случае, когда последовательность $h_{G_k,w}(z)$ равномерно сходится на компактных подмножествах области $G$ к $+\infty$ при $k \to \infty$, мы полагаем $r(G,w) = +\infty$.

Все сказанное выше справедливо для $w = \infty$ со следующей модификацией: функции $h_{G_k,\infty}(z)$ определяются равенствами

$$h_{G_k,\infty}(z) := g_{G_k}(z,\infty) - \log|z|.$$

Если область $G$ односвязна, $G \neq \mathbb{C}$, то для каждой точки $w \in G$ существует единственное конформное отображение $f$ области $G$ на круг $|z| < r_0$, нормированное условиями $f(w) = 0$ и $f'(w) = 1$, при этом имеет место равенство $r_0 = r(G,w)$, а величина $r_0$ называется *конформным радиусом области $G$ относительно точки $w$* (см. [94, 229]). Каждая область $G$, для которой существует обобщенная функция Грина, обладает свойством: для всех точек $\zeta \in \partial G$, за исключением, быть может, некоторого множества нулевой логарифмической емкости и для всех $w \in G$ существует и равен нулю предел $\lim\limits_{z\to\zeta} g_G(z,w)$; такие точки $\zeta$ называются регулярными граничными точками области $G$ [94].

В дальнейшем под *емкостью* мы всегда будем подразумевать логарифмическую емкость. Для компакта $F \subset \mathbb{C}$ его (логарифмическая) емкость определяется следующими равенствами: $\operatorname{cap} F := \frac{1}{r(\overline{\mathbb{C}}\backslash F,\infty)}$, если величина $r(\overline{\mathbb{C}}\backslash F,\infty)$ конечна; $\operatorname{cap} F := 0$ — в противном случае. Для произвольного борелевского множества $E$, лежащего в $\overline{\mathbb{C}}$, мы определяем $\operatorname{cap} E$ как точную верхнюю грань величин $\operatorname{cap} F$, взятую по всем компактам $F \subseteq E \bigcap \mathbb{C}$. Отметим, что борелевские множества нулевой емкости всегда имеют нулевую хаусдорфову размерность и при конформных отображениях переходят во множества нулевой емкости.

## 2.2 Системы точек, классы открытых множеств и типы функционалов

**Определение 2.2.1.** *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Систему точек*

$$A_{n,m} := \left\{a_{k,p} \in \mathbb{C}: \ k = \overline{1,n},\ p = \overline{1,m}\right\}$$

*назовем $(n,m)$-лучевой, если при всех $k = \overline{1,n}$ и $p = \overline{1,m}$ выполняются соотношения:*

$$\begin{aligned}
&0 < |a_{k,1}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty;\\
&\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} =: \theta_k =: \theta_k(A_{n,m});\\
&0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} := 2\pi.
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

*В случае* $m = 1$ $(n, 1)$*-лучевую систему точек будем называть* $n$*-лучевой и использовать более простые обозначения:*

$$a_{k,1} =: a_k,\ k = \overline{1, n}, \quad A_{n,1} =: A_n.$$

**Определение 2.2.2.** *На множестве* $(n, m)$*-лучевых систем рассмотрим следующие величины:*

$$\begin{aligned} &\alpha_k := \alpha_k(A_{n,m}) := \tfrac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1}(A_{n,m}) - \theta_k(A_{n,m})\right], \\ &k = \overline{1, n}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_1, \quad \alpha_0 := \alpha_n. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

*Величины* $\alpha_k(A_{n,m})$, $k = \overline{1, n}$, *будем называть угловыми параметрами системы* $A_{n,m}$. *Очевидно, что*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(A_{n,m}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 2.$$

Если $(n, m)$-лучевая система точек $A_{n,m}$ обладает свойством

$$\alpha_k(A_{n,m}) = \frac{2}{n}, \quad k = \overline{1, n},$$

то такую систему будем называть *равнолучевой*.

Любой $(n, m)$-лучевой системе точек $A_{n,m}$ поставим в соответствие набор областей $P(A_{n,m}) = \{P_k\}_{k=1}^{n}$, где

$$P_k := P_k(A_{n,m}) := \{w \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \theta_k(A_{n,m}) < \arg w < \theta_{k+1}(A_{n,m})\},\ k = \overline{1, n}.$$

Ясно, что с равнолучевой системой точек сопоставляется фиксированная система $P^0(A_{n,m}) = \left\{P_k^0\right\}_{k=1}^{n}$, где

$$P_k^0 := P_k^0(A_{n,m}) := \left\{w \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n} k\right\},\ k = \overline{1, n}.$$

Умножение $(n, m)$-лучевой системы $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ на число $t \in \mathbb{R}^{+}$ определим следующим образом:

$$t \cdot A_{n,m} := \{t \cdot a_{k,p}\}, \quad k = \overline{1, n},\ p = \overline{1, m}.$$

Случай $(n,m)$-равнолучевых систем точек, по-видимому, впервые рассматривался в работе [111].

Для произвольной $(n,m)$-лучевой системы $A_{n,m} = \left\{a_{k,p}:\ k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}\right\}$ обозначим:

$$M(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{k,p}|, \qquad (2.2.3)$$

$$M^{(p)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot|a_{k,p}|, \qquad (2.2.4)$$

$$M\left(A_{n,m}^{(l)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(|\ a_{k,p}^{(l)}\ |^{\frac{n}{2}}\right)\cdot|a_{k,p}|, \qquad (2.2.5)$$

$$M^{(p)}\left(A_{n,m}^{(l)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\chi\left(|\ a_{k,p}\ |^{\frac{n}{2}}\right)\cdot|a_{k,p}|, \qquad (2.2.6)$$

$$R_l := R_l(A_{n,m}) := \left[\frac{M(A_{n,m})}{M(A_{n,m}^{(l)})}\right]^{\frac{1}{nm}}, \qquad (2.2.7)$$

где $p=\overline{1,m}$ в (2.2.3) – (2.2.6),

$$A_{n,m}^{(l)} = \left\{a_{k,p}^{(l)}:\ k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}\right\}, \qquad l=1,2,3$$

— специальные $(n,m)$-лучевые системы точек, определяемые при всех $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$ и $l=\overline{1,3}$ равенствами:

$$\begin{aligned}
a_{k,p}^{(1)} &= \left[\operatorname{tg}\left(\frac{2p-1}{4m}\pi\right)\right]^{\frac{2}{n}}\cdot\exp i\frac{2\pi}{n}(k-1),\\
a_{k,p}^{(2)} &= \left[\operatorname{tg}\left(\frac{p}{2m+1}\pi\right)\right]^{\frac{2}{n}}\cdot\exp i\frac{2\pi}{n}(k-1), \qquad (2.2.8)\\
a_{k,p}^{(3)} &= \left[\operatorname{tg}\left(\frac{p}{2m+2}\pi\right)\right]^{\frac{2}{n}}\cdot\exp i\frac{2\pi}{n}(k-1).
\end{aligned}$$

Для фиксированного $R \in \mathbb{R}^+$ и произвольной $(n, m)$-лучевой системы точек $A_{n,m}$ рассмотрим следующий "управляющий" функционал:

$$M_R(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \left[\chi\left(|\frac{a_{k,p}}{R}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) \cdot \chi\left(|\frac{a_{k,p}}{R}|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot |a_{k,p}|. \quad (2.2.9)$$

Очевидно, что $M_1(A_{n,m}) = M(A_{n,m})$. Кроме того,

$$M_R(A_{n,m}) = R^{mn} \cdot M\left(\frac{1}{R} \cdot A_{n,m}\right). \quad (2.2.10)$$

Если $T_n$ — произвольный набор из $n$ различных точек единичной окружности и $\partial U \backslash T_n$ состоит из обьединения $n$ непересекающихся дуг с длинами $\gamma_1 = \sigma_1 \pi, \ldots, \gamma_n = \sigma_n \pi$, то

$$\mu(T_n) := \prod_{k=1}^{n} \sigma_k. \quad (2.2.11)$$

При каждом $k = \overline{1, n}$ обозначим через $z_k(w)$ ту ветвь многозначной аналитической функции $z = -i\left(e^{-\theta_k i} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, которая реализует однолистное и конформное отображение области $P_k$ на правую полуплоскость $\mathrm{Re} z > 0$, при этом луч $\arg w = \frac{1}{2}\left(\theta_k + \theta_{k+1}\right)$ преобразуется в положительную действительную полуось ($\theta_k$ и $\alpha_k$ определены соответственно в (2.2.1) и (2.2.2)). Тогда функция

$$\zeta_k^{(R)}(w) := \frac{R^{\frac{1}{\alpha_k}} - z_k(w)}{R^{\frac{1}{\alpha_k}} + z_k(w)} \quad (2.2.12)$$

однолистно и конформно отображает область $P_k$ на единичный круг $U = U_1$, $k = \overline{1, n}$. Обозначим $\omega_{k,p}^{(1)}(R) := \zeta_k^{(R)}\left(a_{k,p}\right)$, $\omega_{k,p}^{(2)}(R) := \zeta_k^{(R)}\left(a_{k+1,p}\right)$, $a_{n+1,p} := a_{1,p}$, $\omega_{0,p}^{(2)}(R) := \omega_{n,p}^{(2)}(R)$, $(k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m})$. При всех $k = \overline{1, n}$ множество $\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^{m} \cup \{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^{m}$ состоит из $2m$ различных точек на $\partial U_R$. Пусть

$$\mu_k(R) := \mu_k^{(R)}(A_{n,m}) := \mu\left(\{\omega_{k,p}^{(1)}(R)\}_{p=1}^{m} \cup \{\omega_{k,p}^{(2)}(R)\}_{p=1}^{m}\right), \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.2.13)$$

При $R = 1$ положим

$$\mu_k := \mu_k(1), \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.2.14}$$

Таким образом, с каждой $(n,m)$-лучевой системой $A_{n,m}$ и с некоторым фиксированным числом $R \in \mathbb{R}^+$ сопоставляется набор чисел $\{\mu_k(R)\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^+$, причем, $\mu_k(R) \leqslant m^{-2m}$, $R \in \mathbb{R}^+$. В последнем соотношении знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\omega_{k,p}^{(s)}(R)$ являются вершинами правильного $2m$-угольника ($k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $s = 1,2$).

При заданном $R$ величины $\mu_k(R)$, $k = \overline{1,n}$, будем называть коэффициентами смещения системы $A_{n,m}$ относительно системы $R \cdot A_{n,m}^{(1)}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^n$ — система взаимно непересекающихся областей. При каждом $k = \overline{1,n}$ только конечное число компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$ могут содержать внутри себя какую-то из областей $B_j$, $j = \overline{1,n}$, $j \neq k$; такие компоненты мы называем существенными. Область, полученную выбрасыванием из $\overline{\mathbb{C}}$ всех существенных компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}} \backslash B_k$, будем обозначать $\widetilde{B}_k$. Очевидно, что $B_k \subset \widetilde{B}_k$ при всех $k = \overline{1,n}$ и $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^n$ — система конечносвязных взаимно непересекающихся областей без изолированных граничных точек. Переход от системы областей $\{B_k\}_{k=1}^n$ к системе областей $\left\{\widetilde{B}_k\right\}_{k=1}^n$ называется *операцией заполнения несущественных граничных компонент.*

Пусть $D$, $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, — произвольное открытое множество и $w = a \in D$, тогда $D(a)$ обозначает связную компоненту $D$, содержащую $a$. Для произвольной $(n,m)$-лучевой системы $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ и открытого множества $D$, $A_{n,m} \subset D$, обозначим $D_k(a_{p,s})$ связную компоненту множества $D(a_{p,s}) \bigcap \overline{P_k\left(A_{n,m}\right)}$, содержащую точку $a_{p,s}$, $p = k, k+1$, $s = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$. Через $D_k(0)$ (соответственно $D_k(\infty)$) будем обозначать связную компоненту множества $D(0) \bigcap \overline{P}_k(A_{n,m})$ (соответственно $D(\infty) \bigcap \overline{P}_k(A_{n,m})$), содержащую точку $w = 0$ (соответственно $w = \infty$).

На множестве пар целочисленных индексов $(k,p)$ определим равенство следующим образом:$(k,p) = (q,s) \Leftrightarrow k = q \quad \text{и} \quad p = s$.

**Определение 2.2.3.** *Будем говорить, что открытое множество $D$, $A_{n,m} \subset D$, удовлетворяет первому условию неналегания относительно заданной $(n,m)$-лучевой системы точек $A_{n,m} =$*

*$\{a_{k,p}\}$ если*

$$D_k(a_{p,l})\bigcap D_k(a_{q,s})=\varnothing \tag{2.2.15}$$

*при каждом фиксированном $k=\overline{1,n}$ и для всех различных точек $a_{p,l}$ и $a_{q,s}$, принадлежащих $\overline{P}_k(A_{n,m})$.*

**Определение 2.2.4.** *Открытое множество $D$, $\{0\}\bigcup A_{n,m}\subset D$ (соответственно $\{0,\infty\}\bigcup A_{n,m}\subset D$) удовлетворяет второму (соответственно третьему) условию неналегания относительно $(n,m)$-лучевой системы $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, если выполняется условие (2.2.15) и, кроме того*

$$D_k(0)\bigcap D_k(a_{p,l})=\varnothing$$

*(соответственно*

$$\Big[D_k(0)\bigcap D_k(\infty)\Big]\bigcup\Big[D_k(0)\bigcap D_k(a_{p,l})\Big]\bigcup\Big[D_k(a_{q,s})\bigcap D_k(\infty)\Big]=\varnothing)$$

*при каждом фиксированном $k=\overline{1,n}$ и для всех различных точек $a_{p,l}$ и $a_{q,s}$, принадлежащих $\overline{P}_k(A_{n,m})$.*

Положим $r(D,a):=r(D(a),a)$,

$$g_D(w,a):=\begin{cases}0, \quad w\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{D}(a),\\ g_{D(a)}(w,a), \quad w\in D(a),\\ \varlimsup\limits_{\zeta\to w} g_{D(a)}(\zeta,a), \quad \zeta\in D(a),\, w\in\partial D(a).\end{cases}$$

Для удобства формулировок функционалы, рассматриваемые в Главах 2, 3, 4, 5, разобьем на три типа.

**Определение 2.2.5.** *Функционалами первого типа будем называть функционалы следующего вида:*

$$J=\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\gamma_{k,p}}\left(D,a_{k,p}\right),$$

*где $\gamma_{k,p}\in\mathbb{R}^{+}$, $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$ — $(n,m)$-лучевая система, $D$ — открытое множество, $A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$. В частном случае $D$ может быть объединением попарно непересекающихся областей $B_{k,p}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}$.*

**Определение 2.2.6.** *Функционалами второго типа назовем функционалы вида*

$$J = r^{\gamma_0}(D, 0) \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r^{\gamma_{k,p}}(D, a_{k,p}),$$

*где* $\gamma_0$, $\gamma_{k,p} \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ *— $(n,m)$-лучевая система,* $D$ *— открытое множество,* $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $0 \in D$.

**Определение 2.2.7.** *Функционалы вида*

$$J = [r(D, 0)\, r(D, \infty)]^{\gamma_0} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r^{\gamma_{k,p}}(D, a_{k,p}),$$

*где* $\gamma_0$, $\gamma_{k,p} \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ *— $(n,m)$-лучевая система,* $D$ *— открытое множество,* $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, $0 \in D$, $\infty \in D$, *называются функционалами третьего типа.*

**Определение 2.2.8.** *Задачи, в которых рассматривается вопрос об отыскании точных оценок сверху функционалов первого (соответственно второго или третьего) типа будем называть задачами первого (соответственно второго или третьего) типа.*

## 2.3 Экстремальные проблемы на классах непересекающихся областей

**2.3.1. Истоки экстремальных задач о неналегающих областях.** Направление, связанное с экстремальными задачами для неналегающих областей, берет начало в фундаментальной работе М.А. Лаврентьева [158], в которой, в частности, сформулирована и решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух односвязных взаимно непересекающихся областей комплексной плоскости.

**Теорема 2.3.1.** (М.А. Лаврентьев). *Пусть* $a_1$ *и* $a_2$ *— различные фиксированные точки комплексной плоскости и* $D_1$, $D_2$ *— любые непересекающиеся односвязные области такие, что* $a_k \in D_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1, 2$. *Тогда для функций* $w = f_k(z)$, $k = 1, 2$, *регулярных в круге* $|z| < 1$ *и однолистно отображающих его на области* $D_k$ *так, что* $f_k(0) = a_k$, *справедливо неравенство*

$$\left|f_1'(0)\right| \cdot \left|f_2'(0)\right| \leqslant |a_1 - a_2|^2.$$

*Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда*

$$D_1 = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left|\frac{w-a_1}{w-a_2}\right| < 1 \right\}, \quad D_2 = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left|\frac{w-a_1}{w-a_2}\right| > 1 \right\}.$$

Сейчас теоремой Лаврентьева называется более общий результат.

Далее мы будем использовать понятие внутреннего радиуса области $B$ относительно точки $a \in B$ (см. п. 2.1.3).

**Теорема 2.3.2**. *Пусть $a_1$ и $a_2$ — некоторые фиксированные точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $D_k$, $a_k \in D_k$, $k = 1, 2$, — любые взаимно непересекающиеся области на $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$r(D_1, a_1) \cdot r(D_2, a_2) \leqslant |a_1 - a_2|^2. \qquad (2.3.1)$$

*Причем, для областей $D_k$, $k = 1, 2$, которые имеют классическую функцию Грина, знак равенства в неравенстве (2.3.1) достигается тогда и только тогда, когда области $D_1$, $D_2$ ограничены окружностью $\left|\frac{z-a_1}{z-a_2}\right| = C$, где $C$ — произвольная положительная константа.*

Следующий шаг в развитии этой тематики в 1951 году сделал Г.М. Голузин [93]. Он обобщил задачу Лаврентьева на случай конечного числа $n$ $(n \geqslant 3)$ взаимно непересекающихся односвязных областей $D_k$, $a_k \in D_k \subset \mathbb{C}$ ($\{a_k\}_{k=1}^n$ — любые фиксированные конечные и различные точки комплексной плоскости), а при $n = 3$ — получил ее полное решение.

Пусть $a_k^0 = \exp i\frac{2\pi}{3}(k-1)$ и $B_k^0 = \left\{ w \in \mathbb{C} : |\arg w - \arg a_k| < \frac{\pi}{3} \right\}$, $k = \overline{1,3}$. Отметим, что $B_k^0$ являются круговыми областями, а точки $\{a_k^0\}_{k=1}^3$ — полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w}{(w^3-1)^2}\,dw^2.$$

Справедлив следующий результат Г.М. Голузина [93].

**Теорема 2.3.3**. *Каковы бы ни были различные конечные точки $\{a_k\}_{k=1}^3$ и попарно непересекающиеся односвязные области $\{B_k\}_{k=1}^3$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, для функций $w = f_k(z)$ $(k = 1, 2, 3)$, регулярных (за* *исключением, возможно, одной, которая мероморфна) в открытом единичном круге $|z| < 1$ и однолистно отображающих этот круг, соответственно, на области $\{B_k\}_{k=1}^{3}$, $f_k(0) = a_k$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{3} \left|f_k'(0)\right| \leqslant \frac{64}{81\sqrt{3}} \left|a_1 - a_2\right| \cdot \left|a_1 - a_3\right| \cdot \left|a_2 - a_3\right|.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $B_k = T(B_k^0)$, $k = \overline{1,3}$, где $T(w)$ — единственный конформный автоморфизм плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ такой, что $a_k = T(a_k^0)$, $k = \overline{1,3}$.*

Далее началось стремительное развитие этой тематики. В связи с этим приведем следующие работы: Н.А. Лебедева [160–164], Н.А. Лебедева и Л.Л. Громовой [99], Л.Л. Громовой [100], П.М. Тамразова [212–219], П.П. Куфарева, П.П. Куфарева и А.Е. Фалеса [156, 157], Н.И. Колбиной [140, 141], Дж. Дженкинса [104, 303, 304], Нехари [320], Ю.Е. Аленицина [4–8], А.З. Гриншпана [98], И.А. Александрова [2], В.А. Андреева [10], Г.В. Кузьминой [145–153], П. Дюрена [276, 277], П. Дюрена и М. Шиффера [278, 279], В.Н. Дубинина [105–115], С.И. Федорова [228], Е.Г. Емельянова [116–119], А.Ю. Солынина [197–201], А.Ю. Васильева [85–87, 350], Г.П. Бахтиной [65–80], А.К. Бахтина [18–44], А.К. Бахтина и Г.П. Бахтиной [45–55] и других.

Н.А. Лебедев [160–164] на основе метода площадей решает большое количество основополагающих задач. Примерно в это же время Дж. Дженкинс в своей работе [104] доказывает общую теорему о коэффициентах, которая является решением общей задачи для взаимно непересекающихся областей на конечных римановых поверхностях. В 1967 году П.М. Тамразов в работе [214] существенно дополнил эту теорему. Вообще говоря, из общей теоремы о коэффициентах можно получить большинство известных на то время результатов в теории однолистных функций.

В подавляющем большинстве случаев рассмотренные выше задачи о неналегающих областях относились к классу задач с фиксированными полюсами соответствующих квадратичных дифференциалов.

В 1968 году П.М. Тамразов в работе [215] выдвинул идею о том, что представляет значительный интерес изучение экстремальных задач, полюсы соответствующих квадратичных дифференциалов которых не фиксированы, а обладают некоторой степенью "свободы".

В 1974 году, в соответствии с этой идеей, в кандидатской диссертации [69] Г.П. Бахтина впервые сформулировала и решила ряд экстремальных задач на классе взаимно непересекающихся областей с так называемыми "свободными" полюсами. Фактически, в работе [69] положено начало новому направлению в теории неналегающих областей.

Сформулируем некоторые общие задачи подобного типа.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_\infty$ — фиксированные неотрицательные числа, $k_n$ — класс всех произвольных наборов различных точек единичной окружности $\{a_k\}_{k=1}^n$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$. Пусть $K_n$ обозначает класс всех произвольных систем попарно непересекающихся областей (вообще говоря, многосвязных) $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, B_\infty$ таких, что $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\{a_k\}_{k=1}^n \in k_n$. Внутренний радиус области $B$ относительно $a \in B$ обозначим $r(B, a)$.

**Задача 1.** Найти величину

$$\max_{k_n} \max_{K_n} r^{\alpha_0}(B_0, 0)\, r^{\alpha_\infty}(B_\infty, \infty) \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(B_k, a_k)$$

и указать все экстремали.

Пусть $k'_n$ обозначает совокупность всех наборов $\{a_k\}_{k=1}^n$ различных точек открытого единичного круга, а $K'_n$ — класс всех наборов попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset U_1 = \{|z| < 1\}$, $\{a_k\}_{k=1}^n \in k'_n$.

**Задача 2.** Определить величину

$$\max_{k'_n} \max_{K'_n} \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(B_k, a_k)$$

и все экстремали.

Случай $\alpha_\infty = 0$ задачи 1 (для односвязных областей) рассмотрен в 1974 году Г.П. Бахтиной в работе [69]. Экстремальные задачи типа задач 1 и 2 получили название экстремальных задач со свободными полюсами.

Задачи типа задачи 1 получили название экстремальных задач со свободными полюсами на окружности. В [69] решена задача 1 при $n = 4$ и $\alpha_0 = \alpha_\infty = 0$, $\alpha_k = 1$, $k = \overline{1,4}$ для односвязных симметричных относительно единичной окружности областей.

В 1978 году в работе В.Н. Дубинина [106] получено, в частности, полное решение задачи 1 при $\alpha_0 = \alpha_\infty = 0$, $\alpha_k = 1$, $k = \overline{1,n}$ и всех $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. В 1988 году в [108] получено решение задачи 1 для случая $0 < \alpha_0 \leqslant 1$, $\alpha_\infty = 0$, $\alpha_k = 1$, $k = \overline{1,n}$ и всех $n \geqslant 2$, а также при $0 < \alpha_0 = \alpha_\infty \leqslant \frac{1}{2}$, $\alpha_k = 1$, $k = \overline{1,n}$, и опять–таки при всех $n \geqslant 2$.

После этих результатов тематика получает новый импульс для своего развития. Появилось много работ, посвященных экстремальным задачам о неналегающих областях со "свободными" полюсами (см., например, [149–153], [105–115], [116–119]).

В работе [108] были сформулированы более общие, по сравнению с задачами 1 и 2, экстремальные задачи смешанного типа, в которых часть полюсов фиксирована, а часть — свободна. Отметим, что благодаря идеям и методам работ [108–112] стало возможным получение точных оценок сверху для функционалов, заданных на открытых множествах.

*Функционалы "типа суммы".* В задачах о неналегающих областях, как правило, рассматривались функционалы вида $J = \prod\limits_{k=1}^{n} r^{\gamma_k}(B_k, a_k)$, где $\gamma_k \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$. В 1974 г. Г.П. Бахтина рассмотрела задачу о максимуме функционала $J = \Big|f_1'(0)\Big| + \Big|f_2'(0)\Big|$, где функции $w = f_k(z)$, $a_k = f_k(0)$, $B_k = f_k(U)$, $k = 1, 2$, регулярны в $U$ и однолистно отображают единичный круг $U$ на взаимно непересекающиеся области $B_k$, а точки $a_1$, $a_2$ фиксированы в $\mathbb{C}$. Оказалось, что в этом случае необходимо компактифицировать указанный выше класс пар регулярных и однолистных в $U$ функций "вырожденными" парами вида $\Big(a_1,\, f_2(z)\Big)$ ($f_1(z) \equiv a_1$ однолистная и регулярная в $U$ функция $f_2(z)$ такова, что $f_2(U)\overline{\ni} a_1$), $\Big(f_1(z),\, a_2\Big)$ ($f_1(z)$ — регулярна и однолистна в $U$ и $f_1(U)\overline{\ni} a_2$, $f_2(z) \equiv a_2$) и, наконец, $\Big(a_1,\, a_2\Big)$ ($f_k(z) \equiv a_k$, $k = 1, 2$). Компактифицированный таким образом класс пар $\Big(f_1(z),\, f_2(z)\Big)$ обозначим через $M$. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.3.4**. (Г.П. Бахтина). *На классе $M$ выполняется неравенство*

$$J\left[(f_1, f_2)\right] = \left|f_1'(0)\right| + \left|f_2'(0)\right| \leqslant 4\left|a_1 - a_2\right|.$$

*Знак равенства достигается только для пар вида*

$$\left(a_1,\, a_2 + 4(a_1 - a_2)\frac{\varepsilon z}{(1+\varepsilon z)^2}\right),$$

$$\left(a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\varepsilon z}{(1+\varepsilon z)^2\, a_2}\right), \quad |\varepsilon| = 1.$$

Рассмотрим подкласс $\widehat{M} \subset M(a_1, a_2)$, состоящий из тех и только тех пар $(f_1, f_2) \in M(a_1, a_2)$, для которых $f_k(z)$, $k = 1, 2$, являются выпуклыми функциями (т. е. $f_k(U)$ — выпуклая область, $k = 1, 2$).

**Теорема 2.3.5**. (J. Stankiewicz, Z. Stankiewicz [344]) *На классе $\widehat{M}$ справедливо неравенство*

$$\Big|f_1'(0)\Big| + \Big|f_2'(0)\Big| \leqslant 2|a_1 - a_2|.$$

*Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $f_1(U)$ и $f_2(U)$ являются полуплоскостями, общей границей которых является прямая, ортогональна отрезку $(a_1, a_2)$ и пересекающая его во внутренней точке.*

**2.3.2. Некоторые результаты, предварившие современное развитие направления.** Приведем несколько, полученных различными авторами, важных результатов, ввиду того, что они существенно используются в нашей работе. Первым приведем результат В.Н. Дубинина 1985 года для фиксированных полюсов [107], усиливающий классический результат Дж. Дженкинса [104].

**Теорема 2.3.6**. [107]. *Пусть $Q(z)dz^2$ — положительный квадратичный дифференциал на $G$, регулярный везде, за исключением*

*$n$ простых полюсов и $m$ полюсов второго порядка $b_1$, $b_2$, ..., $b_m$, в окрестностях которых (в терминах некоторого локального параметра, который изображает $b_l$, $l = 1, 2, \ldots, m$, как точку $z = 0$), имеет место разложение*

$$Q(z)dz^2 = \left(-\frac{\alpha_l}{z^2} + \ldots\right) dz^2,$$

*$\alpha_l > 0$, $l = 1, \ldots, m$ ($n \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, множество простых полюсов может быть пустым). Для $n = 0$, $m = 2$ и $G = \mathbb{C}$ одновременно пусть $G_1$ и $G_2$ – любые области, которые ограниченны одной и той же траекторией квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$. В других случаях пусть $G$ является внутренним замыканием круговых областей $G_1, G_2, \ldots, G_m$, соответствующих полюсам $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Тогда для любых областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$, $b_l \in D_l \subset G$, $l = 1, 2, \ldots, m$, объединение которых содержит не больше, чем конечное число замыканий ортогональных траекторий квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{m} r^{\alpha_l}(D_l, a_l) \leqslant \prod_{k=1}^{m} r^{\alpha_l}(G_l, a_l). \qquad (2.3.2)$$

*Если, дополнительно, области $D_l$, $l = 1, \ldots, m$, имеют классические функции Грина, то равенство в (2.3.2) достигается только в том случае, когда линии уровня этих функций состоят из замыканий траекторий квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$. Так, для односвязных областей $D_1, \ldots, D_m$ знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $D_l = G_l$, $l = 1, \ldots, m$.*

Первый результат в экстремальных задачах со свободными полюсами на окружности получен в работе [69]. Приведем его.

**Теорема 2.3.7**. ( Бахтина Г.П. [69]). *Для любых различных точек $a_k$, $k = \overline{1,4}$, которые принадлежат единичной окружности $|z| = 1$, и любых попарно непересекающихся односвязных областей $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,4}$, которые симметричны относительно единичной окружности, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{4} \left|f_k'(0)\right| \leqslant 1, \qquad (2.3.3)$$

*где* $w = f_k(z)$ *является однолистным конформным отображением единичного круга на область* $D_k$, $a_k = f_k(0)$, $k = \overline{1,4}$. *Равенство в (2.3.3) достигается тогда и только тогда, когда* $a_k$ *и* $D_k$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^2}{(w^4-1)^2}\,dw^2$$

.

Из результатов работы [106] вытекает теорема, существенно обобщающая теорему 2.3.7. Приведем ее.

**Теорема 2.3.8**. (Дубинин В.Н. [106]). *Для любых различных точек* $a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 3)$, *которые принадлежат единичной окружности* $|z| = 1$ *и любых попарно непересекающихся областей* $D_k$, $a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{m} r(D_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n. \tag{2.3.4}$$

*Если, дополнительно, области* $D_k$, $k = 1, \ldots, n$, *имеют классические функции Грина, то равенство в (2.3.4) достигается тогда и только тогда, когда*

$$a_k = \exp\left(i\left(\theta + \frac{2\pi k}{n}\right)\right),$$

$$D_k = \left\{z : \left|\arg z - \theta - \frac{2\pi k}{n}\right| < \frac{\pi}{n}\right\}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

*где* $\theta$ *— действительная постоянная.*

Другим важным частным случаем работы [106] является следующий результат.

**Теорема 2.3.9**. [106]. *Пусть* $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, R \in \mathbb{R}^+$, $\lambda < R$. *Тогда для любых* $n$ *различных точек* $a_k$, $|a_k| = \lambda$, $k = \overline{1,n}$, *и произвольной системы попарно непересекающихся областей* $\{D_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in D_k \subset U_R$, $k = \overline{1,n}$ *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4\lambda}{n}\right)^n \cdot \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^n. \tag{2.3.5}$$

*Если, дополнительно, области $D_k$, $k = 1, \dots, n$, имеют классические функции Грина, то равенство в (2.3.5) достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и $D_k$ являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)}{(w^n - \lambda^n)^2 (R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}\, dw^2,$$

*где $U_R$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{N}$ определены в п. 2.1.*

Следующее утверждение принадлежит Е.Г. Емельянову [117].

**Теорема 2.3.10**. [117]. *Пусть для $k = \overline{1,n}$, $b_k = \rho e^{i\theta_k}$, $b'_k = Re^{i\theta_k}$, $0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < 2\pi$, $0 < \rho < R$. Пусть $D_k$, $D'_k$, $k = \overline{1,n}$, — любые односвязные области такие, что $b_k \in D_k$, $b'_k \in D'_k$, $D_i \bigcap D_j = \emptyset$, $D'_i \bigcap D'_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $D_i \bigcap D'_j = \emptyset$ при $i, j = \overline{1,n}$. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} R\left(D_k, b_k\right) \cdot R\left(D'_k, b'_k\right) \leqslant \left(\frac{4\sqrt{R\rho}}{n} \cdot \frac{R^{\frac{n}{2}} - \rho^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}} + \rho^{\frac{n}{2}}}\right)^{2n}, \qquad (2.3.6)$$

*где $R\left(D_k, b_k\right)$ — конформный радиус $D$ относительно $b \in D$. Равенство в (2.3.6) достигается только при $\theta_k = \frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k = \overline{1,n}$.*

Четвертая глава посвящена обобщению и усилению следующей теоремы Г.В. Кузьминой [153].

**Теорема 2.3.11**. [153] *Пусть $\alpha \in (0,1)$, $n \geqslant 2$. Для любых точек $a_k$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,2n}$ и любой системы попарно непересекающихся односвязных областей $\{B_k\}_{k=1}^{2n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,2n}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) r^{\alpha}(B_{2k}, a_{2k}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} r\left(B_{2k-1}^{(0)}, a_{2k-1}^{(0)}\right) r^{\alpha}\left(B_{2k}^{(0)}, a_{2k}^{(0)}\right). \qquad (2.3.7)$$

*Равенство в (2.3.7) достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и $B_k$ являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2}\frac{(\alpha-1)w^{2n} - 2(1+\alpha)w^n + (\alpha-1)}{(w^{2n}-1)^2}\, dw^2.$$

**2.3.3. Метод разделяющего преобразования.** В главах 3 – 5 существенно используются результаты В.Н. Дубинина, полученные в работах [108–110]. Приведем необходимые нам в дальнейшем частные случаи этих результатов.

Конденсатором на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ называется всякая упорядоченная пара $C = (E_0, E_1)$ непересекающихся непустых замкнутых множеств $E_0$ и $E_1$, принадлежащих $\overline{\mathbb{C}}_z$. Открытое множество $G = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus (E_0 \cup E_1)$ назовем *полем*, а сами множества $E_0$, $E_1$ — *пластинами* конденсатора $C$. Принято также обозначение $C = \{G, E_0, E_1\}$.

Конденсатор $C = \{G, E_0, E_1\}$ назовем *допустимым*, если существует вещественная функция $\omega(z)$, непрерывная на $\overline{\mathbb{C}}_z$, равная нулю на $E_0$, единице — на $E_1$ и гармоническая в $G$. Функция $\omega(z)$ называется *потенциальной функцией конденсатора* $C$. Конденсатор назовем *правильным*, если каждая из областей, составляющих его поле, имеет граничные точки на обеих пластинах этого конденсатора.

Обозначим через $\mathcal{L}_2^1(C)$ совокупность всех функций $\omega : \overline{\mathbb{C}}_z \to \mathbb{R}$, непрерывных и липшицевых на $\overline{\mathbb{C}}_z$, равных нулю на множестве $E_0$, единице — на $E_1$. Емкость конденсатора $C$ определяется следующим образом:

$$\Big|C\Big| = \inf_{\omega \in \mathcal{L}_2^1(C)} \iint\limits_{\mathbb{C}_z} \Big|\nabla\omega\Big|^2 dx\,dy, \qquad z = x + iy.$$

Пусть $C = (E_0, E_1)$ — произвольный конденсатор на $z$-сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$; $B_l$, $l = 1, ..., m$, — односвязные попарно непересекающиеся области на $\overline{\mathbb{C}}_z$, ограниченные конечным числом кусочно-гладких кривых и удовлетворяющие условию $E_j \cap \overline{B}_l \neq \emptyset$, $j = 0, 1$, $l = 1, ..., m$. Пусть $\{p_l\}_{l=1}^m$ — некоторое семейство функций $\zeta = p_l(z)$, конформно и однолистно отображающих соответственно области $B_l$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Обозначим через $E_j^{(l)}$ объединение множества $p_l(E_j \cap \overline{B}_l)$ с его отражением относительно мнимой оси. Результатом разделяющего преобразования конденсатора $C = (E_0, E_1)$ относительно семейства функций $\{p_l\}_{l=1}^m$ назовем семейство конденсаторов $\{C_l\}_{l=1}^m$, состоящее из $m$ симметричных конденсаторов $C_l = (E_0^{(l)}, E_1^{(l)})$, $l = 1, ..., m$. Иногда вместо полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta > 0$

в определении некоторых функций $\zeta = p_l(z)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, рассматривают круг $|\zeta| < 1$. В этом случае под $E_j^{(l)}$ понимают объединение множества $p_l(E_j \cap \overline{B}_l)$ с его инверсией относительно окружности $|\zeta| = 1$, $j = 0, 1$. Семейство конденсаторов $\{C_l\}_{l=1}^m$, $C_l = (E_0^{(l)}, E_1^{(l)})$, $l = 1, ..., m$, по-прежнему называют результатом разделяющего преобразования конденсатора $C$.

**Теорема 2.3.12**. *Справедливо неравенство*

$$\left|C\right| \geqslant \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\left|C_l\right|.$$

*Если, дополнительно, конденсатор* $C = \{G, E_0, E_1\}$ *правильный и допустимый, то знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $G \subset \bigcup\limits_{l=1}^{n} \overline{B}_l$ *и в некоторой окрестности любой аналитической дуги, принадлежащей* $\partial B_l \cap G$, $1 \leqslant l \leqslant n$, *потенциальная функция конденсатора* $C$ *симметрична относительно этой дуги. В частности, если* $C$ *— допустимый конденсатор со связным полем, и множество* $\partial B_l \cap G$, $1 \leqslant l \leqslant n$, *содержит отрезок некоторой прямой или окружности* $\gamma$, *то в случае равенства конденсатор* $C$ *симметричен относительно* $\gamma$.

Рассмотрим систему различных точек расширенной комплексной плоскости $0, a_1, a_2, ..., a_n, \infty$ таких, что

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < ... < \arg a_n < 2\pi.$$

Введем обозначения

$$\arg a_{n+1} := 2\pi, \quad a_0 := a_n, \quad \alpha_k := \frac{1}{\pi}\left(\arg a_{k+1} - \arg a_k\right), \ k = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$. Пусть

$$P_k := \left\{w : \ \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\right\}, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

$$P_0 := P_n, \ P_{n+1} := P_1.$$

Тогда функция

$$z_k(w) = -i\left(e^{-i\arg a_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k = 1, 2, ..., n, \qquad z_0 := z_n,\ z_{n+1} := z_1$$

конформно и однолистно отображает области $P_k$, $k = 1, 2, ..., n$, на правую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ таким образом, что выполняются следующие ассимптотические равенства:

$$|z_k(w) - z_k(a_m)| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_m|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}|w - a_m|, \quad w \in \overline{P_k}, \quad w \to a_m,$$

$$k = 1, 2, ..., n,\ m = k, k+1;\ a_{n+1} := a_1;$$

$$|z_k(w)| = |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \in \overline{P_k} \quad w \to 0,\ w \to \infty.$$

Пусть $\{D_k\}_{k=0}^{n+1}$ — семейство областей, удовлетворяющих следующих условиям:

$$0 \in D_0 \subset \overline{\mathbb{C}}, \quad a_k \in D_k \subset \overline{\mathbb{C}},\ k = \overline{1, n}, \quad \infty \in D_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

$$D_k \bigcap D_m = \emptyset, \qquad k \neq m,\ k, m = 0, 1, ..., n, n+1.$$

Обозначим $G_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, объединение связной компоненты множества
$z_k\left(D_k \bigcap \overline{P}_k\right)$, которая содержит точку $z_k(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, с ее отображением относительно мнимой оси, а через $G_{k-1}^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, $G_0^{(2)} := G_n^{(2)}$, — объединение связной компоненты множества $z_{k-1}\left(D_k \bigcap \overline{P}_{k-1}\right)$, которая содержит точку $z_{k-1}(a_k)$, $k = \overline{1, n}$, с ее отображением относительно мнимой оси. Семейство двух симметричных относительно мнимой оси областей $\left\{G_k^{(1)}, G_{k-1}^{(2)}\right\}$ назовем результатом разделяющего преобразования области $D_k$ относительно семейства двух функций $\{z_k, z_{k-1}\}$, $k = \overline{1, n}$.

Аналогично, назовем результатом разделяющего преобразования области $D_0$ относительно семейства функций $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ семейство симметричных относительно мнимой оси областей $G_k^{(0)}$, $k = \overline{1, n}$, которые получены объединением содержащей точку 0 связной компоненты множества $z_k\left(D_0 \bigcap P_k\right)$, $k = \overline{1, n}$, с ее отображением относительно мнимой оси; а результатом разделяющего преобразования области

$D_{n+1}$ относительно семейства функций $\{z_k\}_{k=1}^{n}$, семейство симметричных относительно мнимой оси областей $G_k^{(\infty)}$, $k=\overline{1,n}$, которые получены объединением содержащей точку $\infty$ связной компоненты множества $z_k\left(D_{n+1}\bigcap P_k\right)$, $k=\overline{1,n}$, с ее отображением относительно мнимой оси. Система областей $\left\{G_k^{(0)},G_k^{(1)},G_k^{(2)},G_k^{(\infty)}\right\}$ является системой попарно-непересекающихся областей.

**Теорема 2.3.13**. *Справедливы следующие неравенства:*

$$r\left(D_k,a_k\right)\leq\left[\frac{r\left(G_k^{(1)},z_k\left(a_k\right)\right)}{\frac{1}{\alpha_k}\cdot\left|a_k\right|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\cdot\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)},z_{k-1}\left(a_k\right)\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}}\cdot\left|a_k\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}\qquad\forall k=1,2,...,n,\tag{2.3.8}$$

$$r\left(D_0,0\right)\leq\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(G_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}},\tag{2.3.9}$$

$$r\left(D_{n+1},\infty\right)\leq\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}.\tag{2.3.10}$$

*Причем, если для областей* $D_k$, $k=\overline{0,n+1}$, *существуют классические функции Грина, то в неравенствах (4.1.1) достигается знак равенства тогда и только тогда, когда области* $D_k$, $k=\overline{1,n}$, *соответственно симметричны относительно прямых* $w=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\}$, $\rho>0$, $k=\overline{1,n}$; *а в неравенствах (4.1.2) и (4.1.3) соответственно знак равенства будет тогда и только тогда, когда области* $D_0$ *и* $D_{n+1}$ *симметричны относительно семейства прямых* $w=\rho\cdot\exp\left\{i\cdot\frac{2\pi}{n}\left(k-1\right)\right\}$, $\rho>0$, $k=\overline{1,n}$.

В некоторых случаях удобно вместо полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ рассматривать круг единичного радиуса. Приведем соответствующие формулы В.Н. Дубинина для этого частного случая.

Пусть

$$T(z)=\frac{1+z}{1-z},$$

а

$$\xi_k\left(w\right)=T\left(z_k\left(w\right)\right),\ k=\overline{1,n},\quad \xi_0\left(w\right):=\xi_n\left(w\right).$$

Функции $\xi_k(w)$, $k = \overline{1,n}$, конформно и однолистно отображают области $P_k$, $k = 1, 2, ..., n$, на внутреннюю часть единичного круга $U := \{\xi : |\xi| < 1\}$ таким образом, что выполняются следующие асимптотические равенства:

$$|\xi_k(w) - \xi_k(a_m)| \sim \beta_{m,k} \cdot |w - a_m|, \quad w \in \overline{P_k}, \quad w \to a_m,$$

$$k = 1, 2, ..., n, \; m = k, k+1;$$

$$|\xi_k(w) - \xi_k(0)| \sim \beta_{0,k} \cdot |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \in \overline{P_k}, \quad w \to 0,$$

$$|\xi_k(w) - \xi_k(\infty)| \sim \beta_{\infty,k} \cdot |w|^{-\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \in \overline{P_k}, \quad w \to \infty,$$

где $\beta_{k,k}$, $k = \overline{1,n}$, $\beta_{0,k}$, $\beta_{\infty,k}$ — некоторые положительные числа, которые несложно вычислить (предоставляем это читателю), и $\beta_{k,0} := \beta_{k,n}$.

Пусть преобразование $T(z)$ переводит область $G_k^{(j)}$ в область $\Omega_k^{(j)}$, $k = \overline{1,n}$, $j = 1, 2$, содержащую точку $z_k(a_{k+j-1})$, $\Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}$. Аналогично, $T(z)$ переводит область $G_k^{(0)}$ в область $\Omega_k^{(0)}$, $k = \overline{1,n}$, которая содержит точку $z_k(0)$; а область $G_k^{(\infty)}$ — в область $\Omega_k^{(\infty)}$, $k = \overline{1,n}$, содержащую точку $z_k(\infty)$. Система областей $\left\{\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \Omega_k^{(\infty)}\right\}$ является системой попарно непересекающихся областей, симметричных относительно окружности $|\xi| = 1$.

**Теорема 2.3.14**. *Справедливы следующие неравенства:*

$$r(D_k, a_k) \leq \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \xi_k(a_k)\right) \cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \xi_{k-1}(a_k)\right)}{\beta_{k,k} \cdot \beta_{k,k-1}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \forall k = 1, 2, ..., n, \tag{2.3.11}$$

$$r(D_0, 0) \leq \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(0)}, \xi_k(0)\right)}{\beta_{0,k}}\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}, \tag{2.3.12}$$

$$r(D_{n+1}, \infty) \leq \prod_{k=1}^{n} \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(\infty)}, \xi_k(\infty)\right)}{\beta_{\infty,k}}\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}. \tag{2.3.13}$$

*Причем, если для областей $D_k$, $k = \overline{0, n+1}$, существуют классические функции Грина, то в неравенствах (4.1.6) достигается знак равенства тогда и только тогда, когда области $D_k$, $k = \overline{1, n}$, соответственно симметричны относительно прямых $w = \rho \cdot \exp\left\{i \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\right\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1, n}$; а в неравенствах (4.1.7) и (4.1.8) соответственно знак равенства будет тогда и только тогда, когда области $D_0$ і $D_{n+1}$ симметричны относительно семейства прямых $w = \rho \cdot \exp\left\{i \cdot \frac{2\pi}{n}(k-1)\right\}$, $\rho > 0$, $k = \overline{1, n}$.*

**2.3.4. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора.** Следуя работе [112], приведем некоторые результаты В.Н. Дубинина [111, 112].

Замкнутое множество $E(z_0, r)$, $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}_z$, зависящее от параметра $r > 0$, назовем почти кругом в точке $z_0$ радиуса $r$, если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют непрерывные положительные функции $r_j(r)$, $0 < r < \varepsilon$, $j = 1, 2$, такие, что

$$\overline{U(z_0, r_1(r))} \subset E(z_0, r) \subset \overline{U(z_0, r_2(r))},$$

где $U(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$, $z_0 \in \mathbb{C}_z$ и $U(\infty, r) = \{z : |z| > r^{-1}\}$, и кроме того, $r_j(r) \sim r$ при $r \to 0$, $j = 1, 2$. Всюду ниже $B$ — открытое множество на $\overline{\mathbb{C}}$, дополнение которого $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash B$ имеет положительную гармоническую меру. Пусть $z_l$, $l = \overline{1, m}$, — различные точки множества $B$; $\delta_l$, $l = \overline{1, m}$, — произвольные вещественные числа, не все равные нулю, и пусть $\mu_l$, $\nu_l$, $l = \overline{1, m}$ – произвольные вещественные числа.

Введем обобщения: $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{\psi_l\}$, $\psi_l = \psi_l(r) \equiv \mu_l r^{\nu_l}$, $l = \overline{1, m}$. Здесь и ниже, если не оговорено противное, символы $\{\,\}$, $\sum$ и $\prod$ означают соответственно совокупность, суммирование и произведение по всевозможным индексам, указанным в контексте, за исключением тех, при которых слагаемое в $\sum$ либо равно $\infty$, либо не определено, а сомножитель в произведении равен либо нулю, либо $\infty$.

Далее при достаточно малых $r > 0$ рассмотрим обобщенный конденсатор как упорядоченную совокупность

$$C\,(r;\, B,\, Z,\, \Delta,\, \Psi) := \{E_0, E(z_1, \psi_1(r)), \ldots, E(z_m, \psi_m(r))\}$$

с предписанными значениями соответственно $0, \delta_1, \ldots, \delta_m$. Модуль этого конденсатора $\left|C\,(r;\, B,\, Z,\, \Delta,\, \Psi)\right|$ есть величина, обратная его емкости, которая, в свою очередь, определяется как точная нижняя грань интегралов Дирихле $I(v, B)$ по всем допустимым функциям $v$, то есть функциям $v$ класса Lip равным нулю в некоторой окрестности множества $E_0$ и равным $\delta_l$ на $E(z_l, \psi_l(r))$, $l = \overline{1, m}$ (здесь $\frac{1}{0} = +\infty$). Приведенным модулем множеств $B$ относительно совокупностей $Z$, $\Delta$ и $\Psi$ назовем предел

$$M\left(B,\, Z,\, \Delta,\, \Psi\right) = \lim_{r \to 0} \left( \left| C\left(r;\, B,\, Z,\, \Delta,\, \Psi\right) \right| + \frac{\nu}{2\pi} \log r \right), \qquad (2.3.14)$$

где $\nu = \left(\sum \delta_l^2 \nu_l^{-1}\right)^{-1}$.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.3.15**. *Пусть множества $B$ и совокупности $Z$, $\Delta$ и $\Psi$ — такие же, как и выше. Тогда справедлива асимптотическая формула*

$$\left| C\left(r;\, B,\, Z,\, \Delta,\, \Psi\right) \right| = -\frac{\nu}{2\pi} \log r + M\left(B,\, Z,\, \Delta,\, \Psi\right) + o(1), \quad r \to 0, \qquad (2.3.15)$$

*где*

$$M\left(B,\, Z,\, \Delta,\, \Psi\right) = \frac{\nu^2}{2\pi} \left\{ \sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} \log \frac{r(B, z_l)}{\mu_l} + \sum \frac{\delta_l}{\nu_l} \frac{\delta_j}{\nu_j}\, g_B(z_j, z_l) \right\},$$

$r(B, a) = r(B(a), a)$,

$$g_B(z, a) = \begin{cases} g_{B(a)}(z, a), \\ 0,\ a \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{B}(a), \\ \lim\limits_{\zeta \to z} g_{B(a)}(\zeta, a),\ \zeta \in B(a), z \in \partial B(a), \end{cases}$$

*$B(a)$ — связная компонента открытого множества $B$, содержащая точку $a$.*

**Некоторые выводы.** Несмотря на большое количество полученных конкретных результатов, оказывается, что в большинстве экстремальных задач, изученных многими авторами, на геометрию расположения свободных полюсов накладывается очень ограничительное условие, а именно: свободные полюсы расположены на окружности фиксированного радиуса. Возникает естественный вопрос:

нельзя ли выяснить при каких условиях можно ослабить это требование?

Далее возникает не менее интересный вопрос: для каких классов открытых множеств справедливы неравенства, аналогичные соответствующим результатам для неналегающих областей?

И наконец, нельзя ли получить более точные оценки, учитывающие, некоторым образом, отклонение не экстремальной конфигурации от экстремальной?

# ГЛАВА 3

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ $(n, m)$-ЛУЧЕВЫХ СИСТЕМ ТОЧЕК

## 3.1 Оценки функционалов первого типа для $(n, m)$-лучевых систем точек

### 3.1.1. Основная теорема об оценке функционала первого типа.

Сформулируем один из основных результатов главы 3, полученный А.К. Бахтиным в работах [30, 41, 42].

**Теорема 3.1.1**. *Пусть фиксированы $R \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 3$. Тогда, каковы бы ни были $(n, m)$-лучевая система точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, и произвольная система взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_R(A_{n,m}). \tag{3.1.1}$$

*Знак равенства в (3.1.1) достигается тогда и только тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2, \tag{3.1.2}$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$ *при всех $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$. Угловые параметры и коэффициенты смещения в (3.1.1) определены соотношениями (2.2.2), (2.2.13).*

Для доказательства теоремы 3.1.1 нам понадобятся леммы 3.1.1 – 3.1.3, и с учетом специфики как терминологического характера, так и самой методики изложения, возникает необходимость включения указанных выше лемм непосредственно в само доказательство.

***Доказательство.*** В основе доказательства лежит применение метода кусочно-разделяющей симметризации ( [108–110]). Пусть $R \in \mathbb{R}^{+}$. Тогда семейство функций $\left\{\zeta_k^{(R)}(w)\right\}_{k=1}^{n}$, заданных равенством (2.2.12), является допустимым для кусочно-разделяющего преобразования (см., например, [108–110]) областей $\left\{B_{k,p} : k=\overline{1,n},\, p=\overline{1,m}\right\}$ относительно системы углов $\{P_k\}_{k=1}^{n}$.

Введем обозначение $(\Delta)^* := \left\{w\in\overline{\mathbb{C}} : \frac{1}{\overline{w}} \in \Delta\right\}$ для любого множества $\Delta \in \mathbb{C}$. И пусть $\Omega_{k,p}^{(1)}(R)$ обозначает связную компоненту множества $\zeta_k^{(R)}\left(B_{k,p}\bigcap \overline{P}_k\right)\bigcup\left(\zeta_k^{(R)}\left(B_{k,p}\bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k,p}^{(1)}(R)$, а $\Omega_{k,p}^{(2)}(R)$ — связную компоненту множества $\zeta_{k-1}^{(R)}\left(B_{k,p}\bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\bigcup\left(\zeta_{k-1}^{(R)}\left(B_{k,p}\bigcap \overline{P}_{k-1}\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k,p}^{(2)}(R)$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $\zeta_0^{(R)} := \zeta_n^{(R)}$, $\Omega_{0,p}^{(2)}(R) := \Omega_{n,p}^{(2)}(R)$. Очевидно, что $\Omega_{k,p}^{(s)}(R)$ $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $s=1,2$, являются, вообще говоря, многосвязными областями. Пара областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R)$ и $\Omega_{k,p}^{(1)}(R)$ является результатом разделяющего преобразования области $B_{k,p}$ относительно семейств $\{P_{k-1},P_k\}$, $\left\{\zeta_{k-1}^{(R)},\zeta_k^{(R)}\right\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$ в точке $a_{k,p}$. Из формулы (2.2.12) получаем следующие выражения:

$$\zeta_k^{(R)}(w) = \zeta_k^{(R)}(a_{k,p}) + \left(\zeta_k^{(R)}(w)\right)'_{w=a_{k,p}}(w-a_{k,p}) + \ldots$$

при $w \to a_{k,p}$, где

$$\left|\left(\zeta_k^{(R)}(w)\right)'_{w=a_{k,p}}\right| = \frac{2R^{\frac{1}{\alpha_k}}}{\left|R^{\frac{1}{\alpha_k}} - i|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right|^2}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} =$$

$$= \left[\alpha_k\cdot\frac{1}{2}\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}} + \left|\frac{R}{a_{k,p}}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1} =$$

$$= \left[\alpha_k\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}, \quad k=\overline{1,n}, \quad p=\overline{1,m}.$$

Отсюда вытекают асимптотические выражения

$$\left|\zeta_k^{(R)}(w) - \zeta_k^{(R)}(a_{k,p})\right| \sim \left[\alpha_k\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}\cdot|w-a_{k,p}|,$$

$$w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_k.$$

$$\left|\zeta_{k-1}^{(R)}(w) - \zeta_{k-1}^{(R)}(a_{k,p})\right| \sim \left[\alpha_{k-1} \cdot \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1} \cdot |w - a_{k,p}|, \tag{3.1.3}$$

$$w \to a_{k,p}, \quad w \in \overline{P}_{k-1}.$$

Аналогичным образом получаем соотношения

$$\left|\zeta_k^{(R)}(w) - 1\right| \sim \frac{2}{R^{\frac{1}{\alpha_k}}} \cdot |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0,\, w \in \overline{P}_k,\, k = \overline{1, n}.$$

$$\left|\zeta_k^{(R)}(w) + 1\right| \sim 2R^{\frac{1}{\alpha_k}} \cdot |w|^{-\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to \infty,\, w \in \overline{P}_k,\, k = \overline{1, n}. \tag{3.1.4}$$

Далее пусть $B_0$ есть область произвольной связности и $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$. Через $\Omega_0^{(k)}(R)$ обозначим связную компоненту множества $\zeta_k^{(R)}\left(B_0 \bigcap \overline{P}_k\right) \bigcup \left(\zeta_k^{(R)}\left(B \bigcap \overline{P}_k\right)\right)^*$, $k = \overline{1, n}$, содержащую точку $\zeta = 0$. Семейство $\left\{\Omega_0^{(k)}(R)\right\}_{k=1}^{n}$ является результатом разделяющего преобразования области $B_0$ относительно системы углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и семейства функций $\left\{\zeta_k^{(R)}\right\}_{k=1}^{n}$ в точке $w = 0$. Совершенно аналогично вводится семейство $\left\{\Omega_\infty^{(k)}(R)\right\}_{k=1}^{n}$, являющееся результатом разделяющего преобразования произвольной области $B_\infty$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно системы углов $\{P_k\}_{k=1}^n$ и семейства функций $\left\{\zeta_k^{(R)}\right\}_{k=1}^{n}$ в точке $w = \infty$. Из теоремы 1.9 [110] (см. также [109, 112]) и формул (3.1.3), (3.1.4) получаем неравенства

$$r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R), \omega_{k,p}^{(1)}(R)\right) \cdot r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R), \omega_{k,p}^{(2)}(R)\right) \times \right. \tag{3.1.5}$$

$$\left. \times \left[\alpha_k \cdot \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right] \cdot \left[\alpha_{k-1} \cdot \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$r\left(B_0,0\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)}{\frac{2}{R^{\frac{1}{\alpha_k}}}}\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}, \tag{3.1.6}$$

$$r\left(B_\infty,\infty\right) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)}{2R^{\frac{1}{\alpha_k}}}\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}}. \tag{3.1.7}$$

Случай равенства в (3.1.5) – (3.1.7) полностью исследован в работах [110, 112].

Величины $\alpha_k\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|$, $\frac{2}{R^{\frac{1}{\alpha_k}}}$, $2R^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, назовем коэффициентами кусочно-разделяющего преобразования. В дальнейшем понадобится следующий результат.

**Лемма 3.1.1**. *Пусть $\sigma,\delta,\{\gamma_{k,p}\},R\in\mathbb{R}^+$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$. Тогда для любой $(n,m)$-лучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и любой системы областей $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $B_\infty$, $0\in B_0$, $\infty\in B_\infty$, $a_{k,p}\in B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедливо неравенство*

$$J := r^{\sigma}(B_0,0)\cdot r^{\delta}(B_\infty,\infty)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r^{\gamma_{k,p}}\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{1}{2}(\sigma+\delta)\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot R^{\frac{1}{2}(\sigma-\delta)}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\alpha_k^{x_{k,m}+x_{k+1,m}}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|^2\right]^{\frac{1}{2}\gamma_{k,p}}\times \tag{3.1.8}$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)\right]^{\frac{\sigma\alpha_k^2}{2}}\cdot\left[r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\right]^{\frac{\delta\alpha_k^2}{2}}\times$$

$$\times\prod_{p=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)\right]^{\gamma_{k,p}}\cdot\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right]^{\gamma_{k+1,p}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

*где* $x_{k,m} := \sum\limits_{p=1}^{m} \gamma_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $x_{n+1,m} := x_{1,m}$, $\gamma_{n+1,p} := \gamma_{1,p}$. *Знак равенства в (3.1.8) достигается тогда и только тогда, когда в неравенствах (3.1.6), (3.1.7), а также в (3.1.5) при всех* $k = \overline{1,n}$ *и* $p = \overline{1,m}$ *реализуется знак равенства.*

***Доказательство.*** Используя соотношения (3.1.5) – (3.1.7), получим оценку

$$J \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} R^{\frac{\delta\alpha_k}{2}} \cdot 2^{\frac{\alpha_k^2\delta}{2}} \left[r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{n} 2^{-\frac{\sigma\alpha_k^2}{2}} R^{-\frac{\sigma\alpha_k}{2}} \left[r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \left[\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)|a_{k,p}|^2\right]^{\frac{1}{2}\gamma_{k,p}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)\cdot r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R),\omega_{k-1,p}^{(2)}(R)\right)\right]^{\frac{1}{2}\gamma_{k,p}}.$$

Отметим, что

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)\cdot r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R),\omega_{k-1,p}^{(2)}(R)\right)\right]^{\frac{1}{2}\gamma_{k,p}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \left\{\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)\right]^{\gamma_{k,p}}\cdot\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right]^{\gamma_{k+1,p}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} (\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k)^{\frac{1}{2}\gamma_{k,p}} = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k^{\frac{1}{2}(x_{k,m}+x_{k+1,m})},$$

где $x_{k,m} = \sum\limits_{p=1}^{m}\gamma_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $\gamma_{n+1,p} := \gamma_{1,p}$, $p = \overline{1,m}$, $x_{n+1,m} := x_{1,m}$ и $\sum\alpha_k = 2$. Учитывая эти соотношения, легко получить неравенство (3.1.8). Если хотя бы в одном из неравенств (3.1.5) – (3.1.7) будет строгое неравенство, то и в (3.1.8) знак равенства не может быть достигнут. Лемма 3.1.1 доказана.

Лемма 3.1.1 является формализацией разделяющего преобразования для данного частного случая $(n,m)$-лучевых систем точек.

Приведем теперь один результат В.Н. Дубинина [109, 110] вместе с доказательством, поскольку в дальнейшем он будет играть существенную роль.

**Лемма 3.1.2**. (В.Н. Дубинин). *Для любой системы различных точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $n \geqslant 3$, *и любых взаимно непересекающихся областей* $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = 2^n \mu \left( \bigcup_{k=1}^{n} a_k \right). \tag{3.1.9}$$

*Знак равенства в (3.1.9) достигается тогда и только тогда, когда*

$$a_k = \exp i \left( \frac{2\pi}{n}(k-1) + \theta \right),$$

$$\widetilde{B}_k = \left\{ w \in C : \left| \arg w - \left( \theta + \frac{2\pi}{n}(k-1) \right) \right| < \frac{\pi}{n} \right\},$$

$cap \widetilde{B}_k \backslash B_k = 0, \quad k = \overline{1,n}, \ \theta \in \mathbb{R}.$

***Доказательство.*** [109, 110]. Рассмотрим семейство функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, $k = \overline{1,n}$, где $z_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $\theta_k = \theta_k(A_n)$, $\alpha_k = \alpha_k(A_n)$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Функция $z_k(w)$, $k = \overline{1,n}$, отображает конформно и однолистно угол $P_k(A)$ на правую полуплоскость (выбор ветви $z_k(w)$ определен при построении функции(2.2.12)). Пусть $G_k^{(1)}$ обозначает объединение связной компоненты множества $z_k\left(B_k \bigcap P_k\right)$, содержащей точку $g_k^{(1)} := z_k(a_k) = -i$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси, а $G_k^{(2)}$ — объединение связной компоненты множества $z_k\left(B_{k+1} \bigcap P_k\right)$, содержащей точку $g_k^{(2)} := z_k(a_{k+1})$, $g_n^{(1)} := z_n(a_{n+1}) = z_n(a_1) = i$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси. Очевидно, что $G_k^{(1)}$ и $G_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, — (вообще говоря) многосвязные области. Тогда из теоремы 1.9 [110] и теоремы Лаврентьева [158] получаем

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \left[ \prod_{k=1}^{n} r(B_k^{(1)}, -i) r(B_k^{(2)}, i) \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Далее, очевидно, что $\widetilde{B}_k^{(1)}$, $\widetilde{B}_k^{(2)}$ — односвязные области при всех $k=\overline{1,n}$. Если в последнем неравенстве достигается знак равенства, то $\widetilde{B}_k^{(1)}$ совпадает с нижней полуплоскостью, а $\widetilde{B}_k^{(2)}$ — с верхней. Отсюда вытекает, что прообраз первого квадранта при отображении $z_k(w)$ совпадает с $\widetilde{B}_{k+1}\bigcap P_k$, а прообраз четвертого — с $\widetilde{B}_k\bigcap P_k$, $k=\overline{1,n}$. Тогда из теоремы 1.9 [110] и симметрии относительно биссектрисы угла $P_k$, $k=\overline{1,n}$, получаем равенство $\alpha_k=\frac{2}{n}$, $k=\overline{1,n}$. Далее, легко видеть, что для экстремальных областей выполняется равенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)=\prod_{k=1}^{n} r(\widetilde{B}_k,a_k)$$

и следовательно, $r(B_k,a_k)=r(\widetilde{B}_k,a_k)$, $k=\overline{1,n}$. Таким образом, имеют место соотношения:

$$g_{B_k}(w,a_k)=\ln\frac{1}{|w-a_k|}+\ln r(B_k,a_k)+o(1),\quad w\to a_k,$$

$$g_{\widetilde{B}_k}(w,a_k)=\ln\frac{1}{|w-a_k|}+\ln r(\widetilde{B}_k,a_k)+o(1),\quad w\to a_k.$$

Из последних равенств следует

$$h_{B_k}=g_{\widetilde{B}_k}(w,a_k)-g_{B_k}(w,a_k)=0$$

для всех регулярных точек $\partial B_k$, и $h_{B_k}(w)=o(1)$ при $w\to a_k$, $k=\overline{1,n}$. Тогда $h_{B_k}(w)\equiv 0$ в области $B_k$ в силу принципа максимума. И отсюда следует, что $\operatorname{cap}\widetilde{B}_k\backslash B_k=0$ при всех $k=\overline{1,n}$. Лемма 3.1.2 доказана.

Обратимся к доказательству неравенства (3.1.1). Из условий теоремы 3.1.1 и неравенства (3.1.8) (при $\sigma=0$, $\delta=0$, $\gamma_{k,p}=1$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$) вытекает соотношение

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\cdot\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}|a_{k,p}|\times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)\cdot r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R),\omega_{k-1,p}^{(2)}(R)\right)\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot M_R(A_{n,m})\times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{p=1}^{m}\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)\cdot r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.10)$$

Из способа построения областей $\Omega_{k,p}^{(s)}$ следует, что для каждого фиксированного $k_0 = \overline{1,n}$ области $\Omega_{k_0,p}^{(s)}$ взаимно не пересекаются при всех $p = \overline{1,m}$, $s = 1,2$. Отсюда, учитывая неравенство (3.1.9) леммы 3.1.2, при всех $k = \overline{1,n}$ получаем соотношение:

$$\prod_{p=1}^{m}\prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right) \leqslant 2^{2m}\cdot\mu_k(R), \quad (3.1.11)$$

где величины $\mu_k(R)$, $k = \overline{1,n}$, определяются соотношениями (2.2.11) – (2.2.14).

Используя (3.1.11), из неравенства (3.1.10) получаем

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant 2^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M_R(A_{n,m}) =$$

$$= (2R)^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right). \quad (3.1.12)$$

Рассмотрим условия, при которых в (3.1.12) реализуется знак равенства. Введем вспомогательный функционал

$$\widehat{J}_{n,m} = \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{-m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right), \quad (3.1.13)$$

где $\{a_{k,p}\} = A_{n,m}$ — некоторая $(n,m)$-лучевая система точек, $\{B_{k,p}\}$ — произвольный набор взаимно непересекающихся областей таких, что $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$. Сопоставляя (3.1.12) и (3.1.13), приходим к выражению

$$\widehat{J}_{n,m} \leqslant (2R)^{nm} \cdot M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right). \tag{3.1.14}$$

Равенство в (3.1.14) реализуется тогда и только тогда, когда оно достигается в (3.1.12). Если же в (3.1.14) реализуется знак равенства, то знак равенства реализуется, во-первых, в неравенстве (3.1.5) при всех $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и во-вторых, в неравенстве (3.1.11) при всех $k=\overline{1,n}$. Пусть

$$l_k := l_k\left(A_{n,m}\right) = \{w \in \mathbb{C} : \arg w = \theta_k\}$$

$$k=\overline{1,n}, \quad l_0 := l_n, \quad l_{n+1} := l_1. \tag{3.1.15}$$

**Лемма 3.1.3**. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда для того, чтобы в (3.1.14) достигался знак равенства, необходимо выполнение соотношения*

$$\left(B_{k,p}\bigcap l_{k-1}\right)\bigcup\left(B_{k,p}\bigcap l_{k+1}\right) = \varnothing \tag{3.1.16}$$

*при всех $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.*

***Доказательство.*** Пусть равенство (3.1.16) нарушается при некоторых $k_0=\overline{1,n}$, $p_0=\overline{1,m}$, и пусть, например, $B_{k_0,p_0}\bigcap l_{k_0-1} \neq \varnothing$, тогда открытое множество $\bigcup\limits_{s=1}^{2}\bigcup\limits_{p=1}^{m}\Omega_{k,p}^{(s)}$ имеет внешние точки при $k=k_0-2$. Следовательно, при $k=k_0-2$ неравенство (3.1.11) является строгим, так как нарушены условия реализации знака равенства в (3.1.9) леммы 3.1.2. Поэтому знак равенства в (3.1.14) не достигается. Лемма 3.1.3 доказана.

Таким образом, при $n \geqslant 3$ в случае реализации равенства в (3.1.14) каждая область $B_{k,p}$ может пересекаться с системой (3.1.15) только по точкам луча $l_k$, $k=\overline{1,n}$, при любом $p=\overline{1,m}$, и кроме того, отсюда будет следовать, что точки $w=0$ и $w=\infty$ не являются внутренними ни для одной из областей $B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$,$p=\overline{1,m}$. Обозначим

$$\lambda_k(p) := \left\{\zeta \in U : \arg\zeta = \frac{2\pi}{p}(k-1)\right\},$$

$$k = \overline{1, p}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Учитывая соотношение (2.2.12), приходим к выводу, что функция

$$w_k := w_k(\zeta) := R \cdot e^{i\theta_k} \left(i \frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\alpha_k} \tag{3.1.17}$$

осуществляет конформное отображение круга $U$ на $P_k$, $k = \overline{1, n}$, причем величины $\theta_k$, $\alpha_k$ $k = \overline{1, n}$, определены в (2.2.1) и (2.2.2), где ветвь степенной функции $t = z^{\alpha}$ в (3.1.17) задается следующим образом: $t = r^{\alpha} e^{i\alpha\varphi}$, $z = re^{i\varphi}$,$0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Сектор круга $U \subset \mathbb{C}$, ограниченный двумя соседними радиусами $\lambda_q(2m)$ и $\lambda_{q+1}(2m)$ $q = \overline{1, 2m}$, $\lambda_{2m+1}(2m) := \lambda_1(2m)$, обозначим через $\Delta_q(2m)$. Тогда

$$\widetilde{B}_{k,s} \bigcap P_k = w_k\left(\Delta_s(2m)\right), \quad s = \overline{1, m}$$

$$\widetilde{B}_{k+1,s} \bigcap P_k = w_k\left(\Delta_s(2m)\right), \tag{3.1.18}$$

$$B_{n+1,p} := B_{1,p}, \quad s = \overline{(m+1), 2m},\ k = \overline{1, n}.$$

В силу свойств отображения (3.1.17) области $\widetilde{B}_{k,p} \bigcap P_k$ и $\widetilde{B}_{k+1,2m+1-p} \bigcap P_k$ симметричны относительно биссектрисы угла $P_k$, $k = \overline{1, n}$. Выражения (3.1.18) достаточно полно характеризуют систему областей $\left\{\widetilde{B}_{k,p}\right\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, и $(n, m)$-лучевую систему точек $A_{n,m}$, для которых в (3.1.12) достигается знак равенства. Эта информация об экстремальной системе получена за счет изучения случая равенства в неравенстве (3.1.11) при $k = \overline{1, n}$.

Дополним эту информацию об экстремальной системе изучением случая равенства в (3.1.5) при всех $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$. Из теоремы 1.9 [110] (см. также [112]) следует, что для всякого $k^0 = \overline{1, n}$ области $\widetilde{B}_{k^0,p}$ экстремальной системы обладают симметрией относительно $l_{k^0}$ при всех $p = \overline{1, m}$. Кроме того, функция (2.2.12) обладает симметрией относительно биссектрисы угла $P_k$, $k = \overline{1, n}$. Отсюда вытекает, что $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1, n}$, и что для экстремальной $(n, m)$-лучевой системы точек выполняются равенства:

$$a_{k,p} = w_k\left(\exp i \frac{\pi}{2m}(2p-1)\right) = Re^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)} \operatorname{tg}^{\frac{2}{n}}\left(\frac{2p-1}{4m}\pi\right), \tag{3.1.19}$$

$k = \overline{1, n}, \ p = \overline{1, m}.$

Так как неравенство (3.1.10) получено при любом фиксированном $R \in \mathbb{R}^+$, то из (3.1.19) следует, что $A_{n,m} = R \cdot A^{(1)}_{n,m}$. Система экстремальных областей леммы 3.1.2 является системой круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = -\eta^n \frac{\zeta^{n-2}d\zeta^2}{(\zeta^n - \eta^n)^2}, \tag{3.1.20}$$

$|\eta| = 1$. Учитывая (3.1.20), получаем, что области $\widetilde{\Omega}^{(s)}_{k,p}$ и точки $\omega^{(s)}_{k,p}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, $s = 1, 2$, для которых реализуется знак равенства в (3.1.11), являются соответственно круговыми областями и полюсами дифферанциала

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = \frac{\zeta^{2m-2}d\zeta^2}{(\zeta^{2m} + 1)^2}. \tag{3.1.21}$$

Осуществляя замену переменной

$$\zeta = \frac{R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}}} \tag{3.1.22}$$

в квадратичном дифференциале (3.1.21), получаем, что области $\widetilde{B}_{k,p}$ и точки $a_{k,p}$ являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Qdw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2} dw^2. \tag{3.1.23}$$

В случае реализации знака равенства в (3.1.14) получаем

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(\widetilde{B}_{k,p}, a_{k,p}) = (2R)^{nm} M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right).$$

Таким образом, в этом случае выполняются равенства

$$r(B_{k,p}, a_{k,p}) = r(\widetilde{B}_{k,p}, a_{k,p}), \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Для соответствующих функций Грина будем иметь

$$g_{B_{k,p}}(w, a_{k,p}) = \log\frac{1}{|w - a_{k,p}|} + \log r(B_{k,p}, a_{k,p}) + o(1),$$

$$w \to a_{k.p},$$

$$g_{\widetilde{B}_{k,p}}(w, a_{k,p}) = \log \frac{1}{|w - a_{k,p}|} + \log r(\widetilde{B}_{k,p}, a_{k,p}) + o(1),$$

$$w \to a_{k.p}, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m}.$$

Легко видеть, что на множестве всех регулярных точек $\partial B_{k,p}$ выполняется неравенство

$$h_{k,p}(w) = g_{\widetilde{B}_{k,p}}(w, a_{k,p}) - g_{B_{k,p}}(w, a_{k,p}) \geqslant 0.$$

Тогда $h_{k,p}(w) \geqslant 0$ всюду в области $B_{k,p}$. С другой стороны, $h_{k,p}(a_{k,p}) = 0$. Следовательно [348], в силу принципа максимума для гармонических функций верно тождество $h(w) \equiv 0$. Тогда $g_{\widetilde{B}_{k,p}}(w, a_{k,p}) - g_{B_{k,p}}(w, a_{k,p}) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Отсюда вытекает, что cap $\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p} = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Неравенство (3.1.12) дает неравенство (3.1.1) теоремы 3.1.1. Траектории квадратичного дифференциала (3.1.21) при отображении (3.1.22) преобразуются в траектории квадратичного дифференциала (3.1.2). Соотношения (3.1.17) – (3.1.23) показывают, что равенство в (3.1.1) достигается тогда и только тогда, когда $A_{n,m} = R_1 \cdot A_{n,m}^{(1)}$ и система $\left\{\widetilde{B}_{k,p}\right\}$ является системой круговых областей дифференциала (3.1.2).

Теорема 3.1.1 полностью доказана.

### 3.1.2. Оценка функционала первого типа для $(2,m)$-лучевых систем.

**Теорема 3.1.2**. (А.К. Бахтин [42]). *Пусть $n = 2$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тогда, каковы бы ни были $(2,m)$-лучевая система точек $A_{2,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = 1,2$, $p = \overline{1,m}$, и система взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 1,2$, $p = \overline{1,m}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{2} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{2m} \cdot \left(\alpha_1 \cdot \alpha_2\right)^m \cdot \left(\mu_1(R) \cdot \mu_2(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_R(A_{2,m}). \tag{3.1.24}$$

*При $m \geqslant 2$ знак равенства в (3.1.24) достигается, в частности, и тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $B_{k,p}$, $k = 1,2$, $p = \overline{1,m}$, явля-*

*ются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\left(R^2+w^2\right)^{2m-2}}{\left[(R-iw)^{2m}+(R+iw)^{2m}\right]^2}\,dw^2, \qquad (3.1.25)$$

*а при* $m = 1$ *знак равенства в (3.1.24) достигается, когда точки* $a_{1,1}$ *и* $a_{2,1}$ *являются полюсами квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{dw^2}{(w^2-R^2)^2}, \qquad (3.1.26)$$

*при этом* $\widetilde{B}_{1,1} = B_1^{(\rho)} = \left\{w : \left|\frac{w-R}{w+R}\right| < \rho\right\}$, $\widetilde{B}_{2,1} = B_2^{(\rho)} = \overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{B_1^{(\rho)}}$ *для любого* $\rho \in \mathbb{R}^+$.

***Доказательство.*** При $n = 2$, $m \geqslant 1$ из (3.1.8) получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{2}\alpha_k\right)^m \cdot M_R\left(A_{2,m}\right) \times$$

$$(3.1.27)$$

$$\times\prod_{k=1}^{2}\left\{\prod_{p=1}^{m}\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R);\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right) r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R);\omega_{k-1,p}^{(2)}(R)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Из соотношения (3.1.9) леммы 3.1.2 следует оценка

$$\prod_{p=1}^{m}\left[r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right) r\left(\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R),\omega_{k-1,p}^{(2)}(R)\right)\right] \leqslant$$

$$(3.1.28)$$

$$\leqslant 2^{2m}\cdot\mu_k(R), \quad k = 1, 2.$$

В свою очередь, из неравенств (3.1.27) и (3.1.28) получаем утверждение

$$\prod_{k=1}^{2}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha_1\alpha_2)^m \cdot M_R(A_{2,m}) \cdot \prod_{k=1}^{2} \left[2^{2m} \cdot \mu_k(R)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \tag{3.1.29}$$

$$\leqslant (2)^{2m} \cdot (\alpha_1\alpha_2)^m \cdot (\mu_1(R)\mu_2(R))^{\frac{1}{2}} \cdot M_R(A_{2,m}).$$

Таким образом, неравенство (3.1.24) теоремы 3.1.2 доказано. Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

### 3.1.3. Оценки функционалов первого типа для некоторых открытых множеств.

Для открытых множеств, удовлетворяющих первому условию неналегания, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.1.3**. [41] *Пусть $R \in \mathbb{R}^+$, $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда для произвольной $(n,m)$-лучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и любого открытого множества $D$, $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_{n,m}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D, a_{k,p}\right) \cdot \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp g_D(a_{k,p}, a_{q,s}) \leqslant \tag{3.1.30}$$

$$\leqslant 2^{nm} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^m \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_R\left(A_{n,m}\right).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, когда точки $\{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и множество $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением всех круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[\left(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}}\right)^{2m} + \left(R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}}\right)^{2m}\right]^2}\, dw^2. \tag{3.1.31}$$

***Доказательство.*** Из условия неналегания следует, что $\operatorname{cap}\overline{\mathbb{C}}\backslash D > 0$ и множество $D$ обладает обобщенной функцией Грина (см. п. 2.1). Все дальнейшие рассуждения проводяться в соответствии с работой [111].

Будем рассматривать множества $E_0 = \overline{\mathbb{C}}\backslash D$; $E(a_{k,p},t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_{k,p}| \leqslant t\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $n \geqslant 2$, $n,m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Далее, для достаточно малых $t > 0$ введем конденсатор

$$C\,(t,\,D,\,A_{n,m}) = \{E_0,\,E_1\}\,, \tag{3.1.32}$$

где $E_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{m} E(a_{k,p},t)$. Емкостью конденсатора $C\,(t,\,D,\,A_{n,m})$ называется величина (см. [111])

$$\mathrm{cap}C\,(t,\,D,\,A_{n,m}) = \inf \iint \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right]\,dxdy,$$

где нижняя грань берется по всем вещественным, непрерывным и липшицевым в $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $G = G(z)$ таким, что $G\Big|_{E_0} = 0$, $G\Big|_{E_1} = 1$. Величина, обратная емкости конденсатора $C$, называется модулем этого конденсатора

$$\mid C \mid = [\mathrm{cap}C]^{-1}\,. \tag{3.1.33}$$

Рассмотрим конденсаторы

$$C_k^{(R)}\,(t,\,D,\,A_{n,m}) = \left(E_0^{(k)}(R),\,E_1^{(k)}(R)\right), \tag{3.1.34}$$

где

$$E_s^{(k)}(R) = \zeta_k^{(R)}\left(E_s\bigcap\overline{P}_k(A_{n,m})\right)\bigcup\left[\zeta_k^{(R)}\left(E_s\bigcap\overline{P}_k(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$k = \overline{1,n}$, $s = 0,1$, $\zeta = \zeta_k^{(R)}$ — введенная ранее функция (2.2.12), $\{P_k(a_{n,m})\}_{k=1}^{n} = P(A_{n,m})$ — система углов, соответствующая системе точек $A_{n,m}$, операция $[A]^*$ сопоставляет любому множеству $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ множество, симметричное множеству $A$ относительно окружности $|w| = 1$. Отсюда следует, что конденсатору $C\,(t,\,D,\,A_{n,m})$, при разделяющем преобразовании относительно $P(A_{n,m})$ и семейства $\left\{\zeta_k^{(R)}\right\}_{k=1}^{n}$, соответствует набор конденсаторов $\left\{C_k^{(R)}\,(t,\,D,\,A_{n,m})\right\}_{k=1}^{n}$, симметричных относительно $\partial U = \{z : |z| = 1\}$. В соответствии с работой [111] получаем

$$\mathrm{cap}C\,(t,D,A_{n,m}) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cap}C_k^{(R)}\,(t,D,A_{n,m})\,. \tag{3.1.35}$$

Отсюда следует

$$|C\left(t,D,A_{n,m}\right)| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k^{(R)}\left(t,D,A_{n,m}\right)|^{-1}\right)^{-1}. \qquad (3.1.36)$$

Из теоремы 1 [111] получаем

$$|C\left(t,D,A_{n,m}\right)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi nm}\log\frac{1}{t} + M(D,A_{n,m}) + o(1), \qquad t\to 0, \qquad (3.1.37)$$

где

$$M(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(nm)^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right].$$

Формула (3.1.37) дает асимптотику модуля $C\left(t,\ D,\ A_{n,m}\right)$ при $t\to 0$, а величина $M\left(D,A_{n,m}\right)$ есть не что иное как приведенный модуль множества $D$ относительно $A_{n,m}$. Используя формулы (3.1.3), (3.1.5) и тот факт, что $D$ удовлетворяет первому условию неналегания относительно системы $A_{n,m}$, получим аналогичные асимптотические представления для конденсаторов $C_k\left(t,D,A_{n,m}\right)$, $k=\overline{1,n}$, именно:

$$|C_k^{(R)}\left(t,D,A_{n,m}\right)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi(2m)}\log\frac{1}{t} + M_k^{(R)}(D,A_{n,m}) + o(1), \qquad t\to 0, \qquad (3.1.38)$$

где

$$M_k^{(R)}(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(2m)^2}\left[\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)})}{\left[\alpha_k\chi\left(|\ \frac{a_{k,p}}{R}\ |^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)})}{\left[\alpha_k\chi\left(|\ \frac{a_{k+1,p}}{R}\ |^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)|a_{k+1,p}|\right]^{-1}}\right], \qquad k=\overline{1,n}.$$

Области $\Omega^{(s)}_{k,p}(R)$ и точки $\omega^{(s)}_{k,p}(R)$ введены в п. 3.1.1. При помощи (3.1.38) получаем

$$|C_k^{(R)}\,(t,D,A_{n,m})\,| =$$

$$= \frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\left(1+\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}M_k^{(R)}(D,A_{n,m})+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} = \qquad (3.1.39)$$

$$= \frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}} - \left(\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 M_k^{(R)}(D,A_{n,m}) + o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right), \qquad r\to 0.$$

Далее, из (3.1.39) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}|C_k^{(R)}\,(t,D,A_{n,m})\,|^{-1} =$$

$$(3.1.40)$$

$$= \frac{4\pi nm}{\log\frac{1}{t}} - \left(\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k^{(R)}(D,A_{n,m}) + o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right), \qquad t\to 0.$$

В свою очередь, (3.1.40) позволяет получить такое асимптотическое соотношение:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k^{(R)}\,(t,D,A_{n,m})\,|^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi nm}\left(1-\frac{4\pi m}{n}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\sum_{k=1}^{n}M_k^{(R)}(D,A_{n,m})+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi nm} + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}M_k^{(R)}(D,A_{n,m}) + o(1), \qquad t\to 0. \qquad (3.1.41)$$

Неравенства (3.1.35) и (3.1.36) с учетом (3.1.37) и (3.1.41) позволяют сделать вывод, что

$$\frac{1}{2\pi nm}\log\frac{1}{t} + M(D,A_{n,m}) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi nm}\log\frac{1}{t} + \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}M_k^{(R)}(D,A_{n,m}) + o(1). \qquad (3.1.42)$$

Из (3.1.42) при $t \to 0$ получаем, что

$$M(D, A_{n,m}) \leqslant \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k^{(R)}(D, A_{n,m}). \tag{3.1.43}$$

формулы (3.1.37), (3.1.38) и (3.1.43) приводят к следующему выражению:

$$\frac{1}{2\pi(nm)^2} \left[ \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \log r(D, a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p}, a_{q,s}) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n^2} \cdot \frac{1}{2\pi 4m^2} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} \log \frac{r(\Omega_{k,p}^{(1)}(R), \omega_{k,p}^{(1)}(R)) r(\Omega_{k,p}^{(2)}(R), \omega_{k,p}^{(2)}(R))}{\left( \left[ \alpha_k \chi \left( \mid \frac{a_{k,p}}{R} \mid^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) |a_{k,p}| \right] \left[ \alpha_k \chi \left( \mid \frac{a_{k+1,p}}{R} \mid^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) |a_{k+1,p}| \right] \right)^{-1}} \right].$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(D, a_{k,p}) \cdot \prod_{(k,p)\neq(s,q)} \exp g_D(a_{k,p}, a_{s,q}) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[ \prod_{p=1}^{m} r(\Omega_{k,p}^{(1)}(R), \omega_{k,p}^{(1)}(R)) r(\Omega_{k,p}^{(2)}(R), \omega_{k,p}^{(2)}(R)) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{m} \times \tag{3.1.44}$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \left[ \chi \left( \left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi \left( \left| \frac{a_{k+1,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} |a_{k,p}| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{nm} \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{m} \left( \prod_{k=1}^{n} \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_R\left(A_{n,m}\right).$$

Утверждение теоремы о случае реализации равенства в (3.1.44) проверяется непосредственно. Теорема доказана.

**3.1.4. Некоторые следствия.** Теорема 3.1.1 имеет довольно общий характер, поэтому приведем ряд ее следствий.

**Следствие 3.1.1.** *Пусть фиксированы* $R \in \mathbb{R}^{+}$, $n, m \in \mathbb{N}$ *и* $n \geqslant 3$. *Тогда, каковы бы ни были* $(n,m)$*-лучевая система точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и произвольная система взаимно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2R)^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \prod_{p=1}^{m} M^{(p)}\left(\frac{1}{R} A_{n,m}\right),$$

*где* $M^{(p)}(A_{n,m})$ *определено формулой (2.2.6). Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки* $a_{k,p}$ *и области* $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2,$$

*и* $\mathrm{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$ *при всех* $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. *Угловые параметры и коэффициенты смещения определены соотношениями (2.2.2), (2.2.13).*

***Доказательство.*** Из равенства (2.2.10) получаем

$$M_R(A_{n,m}) = R^{nm} M\left(\frac{1}{R} A_{n,m}\right) =$$

$$= R^{nm} \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \left|\frac{a_{k,p}}{R}\right| =$$

$$= R^{nm} \prod_{p=1}^{m} M^{(p)}\left(\frac{1}{R} A_{n,m}\right).$$

Отсюда и из теоремы 3.1.1 непосредственно следует утверждение следствия 3.1.1.

**Следствие 3.1.2.** *Пусть фиксированы* $R \in \mathbb{R}^+$, $n,m \in \mathbb{N}$ *и* $n \geqslant 3$. *Тогда, каковы бы ни были* $(n,m)$*-лучевая система точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и произвольная система взаимно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left[2\left(\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\right)^{\frac{1}{nm}}\right]^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки* $a_{k,p}$ *и области* $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}\right) = 0$ *при всех* $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

**Следствие 3.1.3.** *Пусть фиксированы* $R \in \mathbb{R}^+$, $n,m \in \mathbb{N}$ *и* $n \geqslant 3$. *Тогда, каковы бы ни были* $(n,m)$*-лучевая система точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и произвольная система взаимно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M_R(A_{n,m}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m}+(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}\right)=0$ *при всех* $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

Следствие 3.1.3 вытекает из утверждения теоремы 3.1.1 ввиду очевидного неравенства $\prod\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n$.

**Следствие 3.1.4.** *Пусть фиксированы* $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$ *и* $n\geqslant 3$. *Тогда, каковы бы ни были* $(n,m)$-*лучевая система точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и произвольная система взаимно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant \left(\frac{2}{m}\right)^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot M_R(A_{n,m}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m}+(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}\right)=0$ *при всех* $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

Следствие 3.1.4 вытекает из утверждения теоремы 3.1.1 вследствие неравенства $\mu_k(R)\leqslant m^{-2m}$, $k=\overline{1,n}$.

**Следствие 3.1.5.** *Пусть фиксированы* $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$ *и* $n\geqslant 3$. *Тогда, каковы бы ни были* $(n,m)$-*лучевая система точек*

*$A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и произвольная система взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \left(\frac{4}{nm}\right)^{nm} \cdot M_R(A_{n,m}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$ *при всех $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.*

**Следствие 3.1.6.** *Пусть фиксированы $R \in \mathbb{R}^+$, $n,m \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 3$. Тогда, каковы бы ни были $(n,m)$-лучевая система точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и произвольная система взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \left(\frac{4R}{nm}\right)^{nm} \cdot M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$ *при всех $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.*

Следствие 3.1.6 вытекает из следствия 3.1.5, если учесть соотношение (2.2.10). Приведем следствие теоремы 3.1.1 иного рода. Такие результаты весьма полезны при решении некоторых экстремальных задач.

**Следствие 3.1.7.** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$. *Тогда для всякой* $(n,m)$*-лучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *такой, что* $M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right)=M(A^{(1)}_{n,m})$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant (2R)^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M(A^{(1)}_{n,m}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки* $a_{k,p}$ *и области* $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m}+(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}=0$ *при всех* $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

**Следствие 3.1.8.** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$. *Тогда для всякой* $(n,m)$*-лучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *такой, что* $M_R(A_{n,m})=R^{nm}M(A^{(1)}_{n,m})$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant\left(\frac{4R}{nm}\right)^{nm}\cdot M(A^{(1)}_{n,m}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки* $a_{k,p}$ *и области* $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадра-*

*тичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$ *при всех* $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

**Следствие 3.1.9.** *Пусть* $n, m, q \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $m = 2q$, $R \in \mathbb{R}^+$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$*-лучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $|a_{k,p}| = R^2|(\overline{a}_{k,l})|^{-1}$, $p + l = m + 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2R)^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{q} \left[\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right].$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки* $a_{k,p}$ *и области* $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$ *при всех* $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

***Доказательство.*** Учитывая равенства

$$\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right| \cdot \left|\frac{a_{k,m+1-p}}{R}\right| = 1, \quad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,q}$$

и $\chi(t)=\chi(t^{-1})$, $t\in\mathbb{R}^{+}$, приходим к соотношению

$$\prod_{p=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\prod_{p=1}^{q}\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\chi\left(\left|\frac{a_{k,m+1-p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k,m+1-p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\prod_{p=1}^{q}\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right].$$

Отсюда и из следствия 3.1.2, с учетом равенства $\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}|a_{k,p}|=R^{nm}$, получаем требуемое утверждение.

**Следствие 3.1.10.** *Пусть $n,m,q\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $m=2q$, $R\in\mathbb{R}^{+}$. Тогда для всякой $(n,m)$-лучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $|a_{k,p}|=\frac{R^2}{|a_{k,s}|}$, $s+p=m+1$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, такой, что $M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right)=M(A_{n,m}^{(1)})$, и каждой системы попарно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant\left(\frac{4R}{nm}\right)^{nm}\cdot\prod_{p=1}^{q}\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(|a_{k,p}^{(1)}|^{\frac{n}{2}}\right)\right]^{2}.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m}+(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}\right)=0$ *при всех $k=\overline{1,n}$, $p,s=\overline{1,m}$.*

***Доказательство.*** Не трудно заметить, что

$$M(A^{(1)}_{n,m})=\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(|a^{(1)}_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)=\prod_{p=1}^{q}\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(|a^{(1)}_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)\right]^2.$$

Отсюда и из следствия 3.1.8 получаем требуемое утверждение. При $m=2$ из следствия 3.1.9 получаем утверждение

**Следствие 3.1.11.** *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^{+}$. Тогда для всякой $(n,2)$-лучевой системы точек $A_{n,2}=\{a_{k,p}\}$, $|a_{k,1}|=\frac{R^2}{|a_{k,2}|}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, такой, что $M\left(\frac{1}{R}A_{n,2}\right)=M(A^{(1)}_{n,2})$, и каждой системы попарно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}r\left(B_{k,1},a_{k,1}\right)r\left(B_{k,2},a_{k,2}\right)\leqslant$$

$$\leqslant(2R)^{2n}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\chi\left(|a^{(1)}_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)\right)^2.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_{k,p}$ и $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^2}{\left(w^n-(\sqrt{2}-1)^2R^n\right)^2\left(w^n-(\sqrt{2}+1)^2R^n\right)^2}\,dw^2.$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}\right)=0$ *при всех $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,2}$.*

***Доказательство.*** Неравенство следствия 3.1.11 получено непосредственно из следствия 3.1.9. Далее, так как $R\cdot A^{(1)}_{n,m}$ является системой всех полюсов квадратичного дифференциала (3.1.2), то при $m=2$ получаем, что $R\cdot A^{(1)}_{n,2}$ представляет набор всех полюсов квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^2}{(w^{2n}-6R^nw^n+R^{2n})^2}\,dw^2.$$

Отсюда и из утверждения теоремы 3.1.1 о знаке равенства в (3.1.1) следует, что знак равенства в неравенстве следствия 3.1.11 достигается только тогда, когда $a_{k,p}$ и $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,2}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^2}{(w^n-(\sqrt{2}-1)^2R^n)(w^n-(\sqrt{2}+1)^2R^n)^2}\,dw^2.$$

Следствие 3.1.11 существенно обобщает теорему 2.3.10 при $\rho=(\sqrt{2}-1)R$.

Сформулируем теперь некоторое обобщение известной задачи Е.Г. Емельянова о двух окружностях [117]. Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$. Найти величину

$$\max_{A_{n,m}\in\mathbb{A}^{(1)}_{n,m}}\ \max_{B\in\mathbb{B}(A_{n,m})}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(B,a_{k,p}),$$

где $\mathbb{B}(A_{n,m})$ — совокупность всех открытых множеств, удовлетворяющих первому условию неналегания относительно $A_{n,m}$, а $\mathbb{A}^{(1)}_{n,m}$ — множество всех $(n,m)$-лучевых систем $A_{n,m}$, расположенных на $m$ концентрических окружностях с центром в нуле (то есть, $|a_{k,p}|$ не зависит от $k=\overline{1,n}$ при каждом $p=\overline{1,m}$) и таких, что $M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right)=M(A^{(1)}_{n,m})$. (Указанные окружности, вообще говоря, не фиксированы.)

**Следствие 3.1.12.** *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$. Тогда для всякой $(n,m)$-лучевой системы точек, расположенной на $m$ концентрических окружностях с центром в нуле (то есть, $|a_{k,p}|$ не зависит от $k$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, такой, что $\prod\limits_{p=1}^{m}M^{(p)}\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right)=M(A^{(1)}_{n,m})$, и произвольной системы попарно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant\left(\frac{4R}{nm}\right)^{nm}\cdot M(A^{(1)}_{n,m}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m}+(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}\right)=0$ *при всех* $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

Следствие 3.1.12 непосредственно вытекает из теоремы 3.1.1 и следствия 3.1.8. Следствие 3.1.12 обобщает известный результат Е.Г. Емельянова [117] на случай $m$ "свободных" окружностей. Полагая в следствии 3.1.1 $m=1$ и $M\left(\frac{1}{R}A_{n,1}\right)=M(R^{-1}A_n)=1$, получаем следующее утверждение.

**Следствие 3.1.13.** *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$. Тогда для любой $n$-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $M\left(\frac{1}{R}A_n\right)=1$, и любого набора попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leqslant(2R)^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и области $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{1,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}}{(R^n-w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}_k\backslash B_k=0$, $k=\overline{1,n}$. *(Угловые параметры и коэффициенты смещения определены соотношениями (2.2.2), (2.2.13).)*

Полагая в следствии 3.1.13 $R=1$ и используя неравенство $\mu_k(R)\leqslant 1$, $k=\overline{1,n}$, получаем такой результат.

**Следствие 3.1.14.** *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$. Тогда для любой $n$-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $M(A_n)=1$, и произвольного* *набора попарно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

*причем, знак равенства достигается в том и только том случае, когда* $a_k$ *и* $\widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, *есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(1-w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\mathrm{cap}\widetilde{B}_k \backslash B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Следствие 3.1.14 обобщает лемму 3.1.2.

**Следствие 3.1.15.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. *Тогда для любой* $n$-*лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $M(A_n) = 1$, *и произвольного набора попарно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n,$$

*причем, знак равенства достигается тогда и только тогда, когда* $a_k$ *и* $\widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, *есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(1-w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\mathrm{cap}\widetilde{B}_k \backslash B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Следствие 3.1.15 усиливает теорему 2.3.8. Аналогично предыдущему, получаем из теоремы 3.1.3 следующие утверждения.

**Следствие 3.1.16.** *Пусть* $R \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$-*лучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, *и любого открытого множества* $D$, $A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего* *первому условию неналегания относительно системы $A_{n,m}$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D, a_{k,p}\right) \leqslant \left(\frac{4R}{nm}\right)^{nm} \cdot M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right).$$

*Знак равенства здесь достигается, в частности, когда $a_{k,p}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, и $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\,dw^2.$$

**Следствие 3.1.17.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $M(A_n) = 1$, и любого открытого множества $D$, $A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(D, a_k\right) \leqslant 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

*причем, знак равенства достигается, в частности, когда $a_k$, $k = \overline{1, n}$, и $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}\,dw^2.$$

**Следствие 3.1.18.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $M(A_n) = 1$, и любого открытого множества $D$, $A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(D, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n},$$

*причем, знак равенства достигается, в частности, когда* $a_k$, $k=\overline{1,n}$, *и* $D$ *являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Следствия 3.1.17 и 3.1.18 значительно обобщают известные результаты В.Н. Дубинина [109, 110].

В качестве приложения теоремы 3.1.1 получаем некоторые оценки для систем областей, лежащих в круге $U_R=\{w:|w|<R\}$, $R\in\mathbb{R}^+$.

**Следствие 3.1.19.** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$*-лучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $|a_{k,p}|<R$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}\subset U_R$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant\left(\frac{1}{m}\right)^{nm}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|a_{k,p}|\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\left[\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

*Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда* $a_{k,p}$ *и области* $\widetilde{B}_{k,p}$,$k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *являются лежащими в* $U_R$, *соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{4m-2}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{4m}+(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{4m}\right]^2}\,dw^2,$$

*и* $\mathrm{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}\right)=0$ *при всех* $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

***Доказательство.*** Образуем $(n,2m)$-лучевую систему $A_{n,2m}=\{a_{k,p}\}$, $a_{k,p}=R^2(\overline{a}_{k,l})^{-1}$, $p+l=2m+1$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,2m}$, и систему областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $B_{k,p}$ симметрична области $B_{k,l}$, $k + l = 2m + 1$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, 2m}$. В силу следствия 2.1.9 имеем

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant (2R)^{2nm} \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{2m} \left( \prod_{k=1}^{n} \mu_k(R) \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{m} \left[ \prod_{k=1}^{n} \chi\left( \left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi\left( \left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \right].$$

С другой стороны, с учетом равенства $r(B_{k,2m+1-p}, a_{k,2m+1-p}) = r(B_{k,p}, a_{k,p}) \cdot \frac{R^2}{|a_{k,p}|^2}$, получаем

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) = \left[ \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \right]^2 \cdot R^{2nm} \left[ \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \right]^{-2}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) =$$

$$= \left[ \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \right]^2 \cdot R^{2nm} \cdot \left[ \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \right]^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant (2R)^{2nm} \left( \frac{1}{2m} \right)^{2nm} \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{2m} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \chi\left( \left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi\left( \left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right).$$

Тогда

$$\left[ \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \right]^2 \leqslant \left( \frac{2}{2m} \right)^{2nm} \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right)^{2m} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} \chi\left( \left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_k}} \right) \chi\left( \left| \frac{a_{k,p}}{R} \right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}} \right) \cdot \left[ \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{m} |a_{k,p}| \right]^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{m}\right)^{2nm} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{2m} \left[M_R(A_{n,m})\right]^2 .$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства, получаем

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{nm} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot M_R(A_{n,m}).$$

Утверждение о знаке равенства вытекает из аналогичного утверждения следствия 3.1.9.

Полагая в следствии 3.1.19 $m = 1$, получаем следующее утверждение.

**Следствие 3.1.20.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тогда для произвольной $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| < R$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in B_k \subset U_R$, $k = \overline{1,n}$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot M_R(A_n).$$

*Равенство здесь реализуется только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, являются лежащими в $U_R$, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^2}{\left[w^n - (\sqrt{2}-1)^2 R^n\right]^2 \left[w^n - (\sqrt{2}+1)^2 R^n\right]^2}\, dw^2.$$

**Следствие 3.1.21.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тогда для любой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n} \subset U_R$, $M\left(\frac{1}{R}A_n\right) = M^{(1)}(A_{n,2}^{(1)})$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in B_k \subset U_R$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot R^n \cdot M^{(1)}(A_{n,2}^{(1)}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве реализуется тогда и только тогда, когда* $a_k$ *и* $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{1,n}$, *являются лежащими в* $U_R$, *соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^2}{\left(w^n-(\sqrt{2}-1)^2R^n\right)^2\left(w^n-(\sqrt{2}+1)^2R^n\right)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_k\backslash B_k\right)=0$ *при всех* $k=\overline{1,n}$.

Следствие 3.1.21 дает существенное усиление и обобщение теоремы 2.3.9 при $\rho_1=(\sqrt{2}-1)R$. Используя неравенство $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^n$, получаем из 3.1.21 следующий результат.

**Следствие 3.1.22.** *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$. *Тогда для любой* $n$*-лучевой системы точек* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n\subset U_R$, $M\left(\frac{1}{R}A_n\right)=M^{(1)}(A_{n,2}^{(1)})$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in B_k\subset U_R$, $k=\overline{1,n}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left(\frac{2R}{n}\right)^n\cdot M^{(1)}(A_{n,2}^{(1)})$$

*Знак равенства в этом неравенстве реализуется тогда и только тогда, когда* $a_k$ *и* $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{1,n}$, *являются лежащими в* $U_R$, *соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^2}{\left(w^n-(\sqrt{2}-1)^2R^n\right)^2\left(w^n-(\sqrt{2}+1)^2R^n\right)^2}\,dw^2.$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_k\backslash B_k\right)=0$ *при всех* $k=\overline{1,n}$.

В качестве приложения теоремы 3.1.1 получим результат об искажении для однолистных функций. Ранее результаты такого типа были получены в [110, 112]. Пусть $S^*$ обозначает класс всех однолистных и регулярных функций $f(z)$ в круге $U$, $f(0)=1-f'(0)=0$, отображающих $U$ на области, звездообразные относительно начала координат.

**Теорема 3.1.4**. *Пусть* $n \geqslant 3$, $\rho \in (0,1)$, $R \in \mathbb{R}^{+}$, $z_k = \exp i\frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k=\overline{1,n+1}$. *Тогда, для каждой функции* $f \in S^{*}$ *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{n} \left(\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1+\rho^{n}}{1-\rho^{n}}\right)^{n} \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M\left(\left\{\frac{f(z_k)}{R}\right\}_{k=1}^{n}\right),$$

*где* $\alpha_k = \frac{1}{\pi}\arg\frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}$, $\mu_k(R)$ *определены в (2.2.13) для* $A_n = \{f(z_k)\}_{k=1}^{n}$. *Знак равенства в последнем неравенстве достигается для функции* $f(z) = \frac{z}{(1-z^{n})^{\frac{2}{n}}}$ *и* $R = \frac{\rho}{(1-\rho^{n})^{\frac{2}{n}}}$.

***Доказательство.*** Рассмотрим $n$-лучевую систему точек $A_n = \{f(z_k)\}_{k=1}^{n}$ и набор секторов $\Delta_k = \{w \in U : \left|\arg w - \frac{2\pi}{n}(k-1)\right| < \frac{\pi}{n}\}$, $\Delta_{k+1} := \Delta_1$, $k=\overline{1,n}$. Области $f(\Delta_k) =: B_k$, $f(z_k) \in B_k$, $k=\overline{1,n+1}$, образуют систему неналегающих областей. Тогда, в силу теоремы 3.1.1, получаем

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, f(z_k)\right) \leqslant (2R)^{n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M\left(\frac{1}{R}A_n\right).$$

Области $B_k$, $k=\overline{1,n}$, суть односвязные области, поэтому $r\left(B_k, f(z_k)\right) = |f'(z_k)|\cdot|\varphi_k'(0)|$, где $z=\varphi_k(\zeta)$ – однолистное и конформное отображение $U$ на $\Delta_k$, $k=\overline{1,n}$, $\varphi_k(0)=z_k$, $\varphi_k'(0) > 0$. Известно [117], что $|\varphi_k'(0)| = \left(\frac{4\rho}{n}\cdot\frac{1-\rho^{n}}{1+\rho^{n}}\right)$.Отсюда получаем

$$\prod_{k=1}^{n} |f'(z_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{n}\left(\rho\frac{1-\rho^{n}}{1+\rho^{n}}\right)^{-n}\cdot R^{n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M\left(\frac{1}{R}A_n\right).$$

Знак равенства в этом неравенстве реализуется, когда $f(z) = \frac{z}{(1-z^{n})^{\frac{2}{n}}}$ и $R = f(\rho) = \frac{\rho}{(1-\rho^{n})^{\frac{2}{n}}}$.

Учитывая неравенства $\left(\prod\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\right) \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n$, $\mu_k(R) \leqslant 1$, $k=\overline{1,n}$ получаем такое утверждение.

**Следствие 3.1.23.** *При условиях теоремы 3.1.4 справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}|f'(z_k)| \leqslant \left(\frac{R}{\rho}\cdot\frac{1+\rho^n}{1-\rho^n}\right)^n \cdot M\left(\left\{\frac{f(z_k)}{R}\right\}_{k=1}^{n}\right),$$

*равенство в котором достигается для* $f(z)=\frac{z}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}$ *и* $R=\frac{\rho}{(1-\rho^n)^{\frac{2}{n}}}$.

Для функций $f\in S^*$, удовлетворяющих условию $M\left(\{R^{-1}f(z_k)\}_{k=1}^{n}\right)\leqslant 1$, где $R=\frac{\rho}{(1-\rho^n)^{\frac{2}{n}}}$, получаем следующий результат.

**Следствие 3.1.24.** *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $\rho\in(0,1)$, $z_k=\exp i\frac{2\pi}{n}(k-1)$, $k=\overline{1,n+1}$, $R_0=\rho(1-\rho^n)^{-\frac{2}{n}}$. *Тогда для функций* $f\in S^*$ *таких, что* $M\left(\{R_0^{-1}f(z_k)\}_{k=1}^{n}\right)\leqslant 1$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}|f'(z_k)|\leqslant\frac{(1+\rho^n)^n}{(1-\rho^n)^{n+2}},$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается для функции* $f(z)=z(1-z^n)^{-\frac{2}{n}}$.

Приведем еще один результат, вытекающий из теоремы 3.1.3.

**Следствие 3.1.25.** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$*-лучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *такой, что* $M_R(A_{n,m})=M_R(A_{n,m}^{(1)})$, *и любого открытого множества* $D$, $A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы* $A_{n,m}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s})\leqslant\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\frac{r(D^{(1)},a_{k,p}^{(1)})}{r(D,a_{k,p})},$$

*где* $D^{(1)}$ *— объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала (3.1.2),* $A_{n,m}^{(1)}=\{a_{k,p}^{(1)}\}$ *— система полюсов (3.1.2).*

**Следствие 3.1.26** [36]. *Пусть $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для каждой $(n,m)$-лучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \left(2R_1(A_{n,m})\right)^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M(A^{(1)}_{n,m}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки $a_{k,p}$ и области $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R_1^n + w^n)^{2m-2}}{\left[(R_1^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (R_1^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2$$

*и* $\operatorname{cap} \widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p} = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. *(Величины $R_1(A_{n,m})$ и $\mu_k$ определены в (2.2.7) и (2.2.14)).*

***Доказательство.*** При $R = R_1 = 1$ утверждения следствия 3.1.7 и следствия 3.1.26 совпадают. Если же $R_1 = R_1(A_{n,m}) \neq 1$, то из формул (3.1.12) при $R = 1$ и (2.2.7) получаем

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M(A_{n,m}) =$$

$$= (2R_1)^{nm} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M(A^{(1)}_{n,m}) \leqslant$$

$$\leqslant (2R_1)^{nm} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\left(\frac{1}{m}\right)^{nm} \cdot M(A^{(1)}_{n,m}) = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B^{(1)}_{k,p}, b^{(1)}_{k,p}\right),$$

где $b^{(1)}_{k,p}$ и $B^{(1)}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, — полюсы и круговые области квадратичного дифференциала (3.1.2) при $R = R_1$. В этой цепочке неравенств использованы неравенства $\prod\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n$, причем равенство реализуется только для равнолучевых систем точек и $\mu_k \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{2m}$, $k=\overline{1,n}$. Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда точки $\omega^{(s)}_{k,p}(R_1)$ являются полюсами квадратичного дифференциала (3.1.21). Отсюда следует утверждение следствия 3.1.26.

Из теоремы 3.1.1 для систем однолистных функций непосредственно вытекает следующее утверждение.

**Следствие 3.1.27** *Пусть* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $R \in \mathbb{R}^+$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *— $(n,m)$-лучевая система точек,* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *— набор попарно непересекающихся односвязных областей и* $\{f_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *— набор функций, регулярных (за исключением, возможно, одной, которая является мероморфной) и однолистных в* $U=\{z : |z|<1\}$ *таких, что* $w=f_{k,p}(z)$, $a_{k,p}=f_{k,p}(0)$, $B_{k,p}=f_{k,p}(U)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|f'_{k,p}(0)| \leqslant 2^{nm}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M_R(A_{n,m}).$$

*Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $f_{k,p}(0)$ *и* $f_{k,p}(U)$ *для всех* $k=\overline{1,n}$ *и* $p=\overline{1,m}$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-2}}{[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m}+(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}]^2}\,dw^2.$$

В свою очередь, следствие 3.1.27 позволяет получить решение такой экстремальной задачи.

**Следствие 3.1.28** *Пусть* $n,m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $R \in \mathbb{R}^+$, $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *— $(n,m)$-лучевая система точек,* $M_R(A_{n,m}) = R^{nm}M(A^{(1)}_{n,m})$, $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p}\in B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *— набор попарно непересекающихся односвязных областей и* $\{f_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *— набор функций, регулярных (за исключением, возможно, одной, которая является мероморфной) и однолистных в* $U$ *таких, что* $w=f_{k,p}(z)$, $a_{k,p}=f_{k,p}(0)$, $B_{k,p}=f_{k,p}(U)$. *Тогда* *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|f'_{k,p}(0)| \leqslant 2^{nm}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k(R)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot M_R(A_{n,m}^{(1)}),$$

*причем знак равенства реализуется тогда и только тогда, когда* $a_{k,p}$ *и* $B_{k,p}$ *для всех* $k=\overline{1,n}$ *и* $p=\overline{1,m}$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-2}}{[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m}+(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}]^2}\,dw^2.$$

Из следствия 3.1.19 для систем ограниченных однолистных функций вытекает утверждение.

**Следствие 3.1.29** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $R\in\mathbb{R}^+$, $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $|a_{k,p}|<R$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *— $(n,m)$-лучевая система точек такая, что*

$$M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right)=\prod_{p=1}^{m}M^{(p)}(A_{n,2m}^{(1)}),$$

$\{f_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *— набор регулярных и однолистных в* $U$ *функций таких, что* $f_{k,p}(U)\subset U_R$, $f_{k,p}(U)\bigcap f_{q,l}(U)=\varnothing$ *при всех* $(k,p)\neq(q,l)$, $a_{k,p}=f_{k,p}(0)$, $k,q=\overline{1,n}$, $p,l=\overline{1,m}$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}|f'_{k,p}(0)|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{R}{m}\right)^{nm}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{m}\prod_{p=1}^{m}M^{(p)}(A_{n,2m}^{(1)}),$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается при тех же условиях, что и в следствии 3.1.19.*

Следует также отметить следствия из теоремы 3.1.1 при $R=1$.

**Следствие 3.1.30.** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$. *Тогда для всякой $(n,m)$-лучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и* *произвольной системы взаимно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant 2^{nm} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M(A_{n,m}).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда точки* $a_{k,p}$ *и области* $B_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *являются, соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^{2m-2}}{\left[(1-iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (1+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap} \widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p} = 0$ *при всех* $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. *(Угловые параметры* $\alpha_k$ *и величины* $\mu_k$ *определены соотношениями (2.2.2) и (2.2.14).)*

**Следствие 3.1.31** [30, 36]. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. *Тогда для всякой* $(n,m)$*-лучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *такой, что* $M\left(\frac{1}{R}A_{n,m}\right) = M(A_{n,m}^{(1)})$, *и произвольной системы попарно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant 2^{nm} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{m} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k\right)^{\frac{1}{2}} \cdot M(A_{n,m}^{(1)}).$$

*Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда точки* $a_{k,p}$ *и области* $B_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *являются, соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^{2m-2}}{\left[(1-iw^{\frac{n}{2}})^{2m} + (1+iw^{\frac{n}{2}})^{2m}\right]^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap} \widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p} = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

## 3.2 Оценки функционалов второго типа для равнолучевых систем

### 3.2.1. Оценки функционалов второго типа для систем неналегающих областей.

**Теорема 3.2.1**. [41] *Пусть* $R \in \mathbb{R}^{+}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Тогда для любой* $(n, m)$*-равнолучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и любого набора произвольных взаимно непересекающихся областей* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $0 \in B_0$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$[r(B_0, 0)]^{\frac{n^2}{4}} \prod_{k,p=1}^{n,m} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant \tag{3.2.1}$$

$$\leqslant \left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm} \left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot R^{\left(\frac{n}{2}\right)^2} M_R(A_{n,m}).$$

*Знак равенства в (3.2.1) достигается тогда и только тогда, когда* $0$, $\{a_{k,p}\}$ *и* $B_0$, $\{\widetilde{B}_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-1}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1} - (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}\right]^2}\, dw^2. \tag{3.2.2}$$

***Доказательство.*** Как и в предыдущем пункте, к области $B_0$ в точке $w = 0$ применимо разделяющее преобразование относительно семейства функций (2.2.12) и системы областей $\{P_k^0\}$. К каждой области $B_{k_0,p}$, $p = \overline{1,m}$, применяем разделяющее преобразование относительно системы функций $\left\{\zeta_{k_0-1}^{(R)}, \zeta_{k_0}^{(R)}\right\}$, $k_0 = \overline{1,n}$, $\zeta_0^{(R)} = \zeta_n^{(R)}$. Результатом разделяющего преобразования области $B_0$ в точке $w = 0$ является семейство $\left\{\Omega_0^{(k)}(R)\right\}_{k=1}^{n}$, $0 \in \Omega_0^{(k)}(R)$, $k = \overline{1,n}$. Пара областей $\Omega_{k-1,p}^{(2)}(R)$ и $\Omega_{k,p}^{(1)}(R)$ являются результатом разделяющего преобразования области $B_{k,p}$ относительно точки $a_{k,p}$. Процедура получения областей $\Omega_{k,p}^{(s)}(R)$ и $\Omega_0^{(k)}(R)$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, такая же, как и при доказательстве теоремы 3.1.1. Очевидно, что $\omega_{k,p}^{(s)} \in \Omega_{k,p}^{(s)}$ при всех $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $s = 1,2$. С учетом соотношений (3.1.5), (3.1.6) неравенство (3.1.8) леммы 3.1.1 при $\sigma = \frac{n^2}{4}$, $\delta = 0$, $\gamma_{k,p} = 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, дает оценку

$$r^{\frac{n^2}{4}}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{n}{2}} \cdot R^{\frac{n^2}{4}} \prod_{k=1}^{n}\left[r(\Omega_0^{(k)}(R),1)\right]^{\frac{2}{n^2}}\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{p=1}^{m}\prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = \qquad (3.2.3)$$

$$= 2^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\cdot R^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{r(\Omega_0^{(k)}(R),1)\prod_{p=1}^{m}\prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Знак равенства в (3.2.3) достигается тогда и только тогда, когда в (3.1.5), (3.1.6) реализуется знак равенства при всех $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Из неравенства (3.1.9) леммы 3.1.2 получаем соотношения

$$r(\Omega_0^{(k)}(R),1)\prod_{p=1}^{m}\prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right) \leqslant \left(\frac{2}{2m+1}\right)^{2m+1}\cdot 2^{2m+1}, \qquad (3.2.4)$$

знак равенства в (3.2.4) реализуется тогда и только тогда, когда точки 1, $\omega_{k,p}^{(s)}(R)$ и области $\widetilde{\Omega}_{k,p}^{(s)}(R)$, $\widetilde{\Omega}_0^{(k)}(R)$ являються, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = \frac{\zeta^{2m-1}}{(1-\zeta^{2m+1})^2}\,d\zeta^2. \qquad (3.2.5)$$

Сопоставляя неравенства (3.2.3) и (3.2.4) получаем следующую оценку

$$r^{\frac{n^2}{4}}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\cdot R^{\frac{n^2}{4}}\cdot M_R(A_{n,m})\cdot 2^{\frac{n(2m+1)}{2}}\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n(2m+1)}{2}} = \quad (3.2.6)$$

$$=\left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm}\cdot\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot R^{\frac{n^2}{4}}\cdot M_R(A_{n,m}).$$

Знак равенства в (3.2.6) достигается только при одновременной реализации равенства во всех неравенствах (3.1.5), (3.1.6), (3.2.4). Круговыми областями квадратичного дифференциала (3.2.5) являются области

$$\widehat{\widehat{D}}_p=\left\{\zeta\in\mathbb{C}:\ \frac{\pi}{2m+1}(2k-3)<\arg\zeta<\frac{\pi}{2m+1}(2k-1)\right\},$$

$$p=\overline{1,2m+1}.$$

Положим $\widehat{\widehat{\Delta}}_p=U\bigcap\widehat{\widehat{D}}_p$, $p=\overline{1,2m+1}$. Секторы $\widehat{\widehat{\Delta}}_p$ и $\widehat{\widehat{\Delta}}_q$ симметричны друг другу относительно вещественной оси, если $p+q=2m+3$, $p,q\geqslant 2$, а сектор $\widehat{\widehat{\Delta}}_1$ обладает симметрией относительно вещественной оси. С учетом (3.1.17) и условий теоремы 3.2.1 функции

$$\widehat{\widehat{w}}_k(\zeta)=R\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)}\left(i\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\frac{2}{n}},\quad k=\overline{1,n}$$

реализуют конформное отображение круга $U$ на $P_k^{(0)}$. Кроме того, в случае реализации равенства в (3.2.6) совершенно очевидно, что

$$\widetilde{B}_{k,p}\bigcap P_k^{(0)}=\widehat{\widehat{w}}_k\left(\widehat{\widehat{\Delta}}_{p+1}\right),\quad \widetilde{B}_{k+1,p}\bigcap P_k^{(0)}=\widehat{\widehat{w}}_k\left(\widehat{\widehat{\Delta}}_{2m+2-p}\right),$$

$$\widetilde{B}_0\bigcap P_k^{(0)}=\widehat{\widehat{w}}_k\left(\widehat{\widehat{\Delta}}_1\right),\quad p=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n},\quad B_{n+1,p}:=B_{1,p}.$$

Кроме того, в случае реализации равенства, аналогично рассуждениям, сделанным при доказательстве теоремы 3.1.1, получаем

$$r(B_{k,p},a_{k,p})=r(\widetilde{B}_{k,p},a_{k,p}),$$

$$r(B_0,0)=r(\widetilde{B}_0,0),\quad k=\overline{1,n},\quad p=\overline{1,m}.$$

Отсюда следует, что

$$g_{B_0}(w,0)=\log\frac{1}{|w|}+\log r(B_0,0)+o(1),\quad w\to 0,$$

$$g_{\widetilde{B}_0}(w,0)=\log\frac{1}{|w|}+\log r(\widetilde{B}_0,0)+o(1),\quad w\to 0.$$

Тогда на множестве всех регулярных точек на $\partial B_0$ выполняется неравенство

$$h_0(w)=g_{\widetilde{B}_0}(w,0)-g_{B_0}(w,0)\geqslant 0.$$

Ввиду того, что $h_0(w)$ — гармонична в $B_0$ и $h_0(0)=0$, можем воспользоваться обобщенным принципом максимума для гармонических функций. Получаем тождество $h_0(w)\equiv 0$, и следовательно, $g_{\widetilde{B}_0}(w,0)\equiv g_{B_0}(w,0)$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{cap}\widetilde{B}_0\backslash B_0=0$. Для областей $B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, рассуждения аналогичны приведенным в доказательстве теоремы 3.1.1. Траектории квадратичного дифференциала (3.2.5) при отображении

$$\zeta=\frac{R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}}}$$

преобразуются в траектории квадратичного дифференциала (3.2.2). Таким образом, в случае реализации знака равенства в (3.2.6) получаем, что точки $a_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и $w=0$ образуют систему полюсов, а соответственно, области $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, — систему круговых областей квадратичного дифференциала (3.2.2). Теорема 3.2.1 доказана.

### 3.2.2. Оценки функционалов второго типа для открытых множеств.

**Теорема 3.2.2**. *Пусть $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Тогда для произвольной $(n,m)$-равнолучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и любого открытого множества $D$, $\{0\}\bigcup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего второму условию неналегания относительно системы $A_{n,m}$, справедливо неравенство*

$$[r(D,0)]^{(\frac{n}{2})^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D,a_{k,p}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp n g_D(0,a_{k,p})\times$$

$$\times \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp g_D(a_{k,p}, a_{q,s}) \leqslant \tag{3.2.7}$$

$$\leqslant \left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm} \cdot \left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot R^{\frac{n^2}{4}} \cdot M_R\left(A_{n,m}\right),$$

*знак равенства в котором достигается,в частности, когда* $\{0\} \bigcup A_{n,m}$ *и* $D$ *есть, соответственно, совокупность всех полюсов и объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала (3.2.24).*

***Доказательство.*** Очевидно, что область $D$ обладает функцией Грина (вообще говоря обобщенной). Рассмотрим множества

$$E_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash D; \qquad \overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leqslant t\},$$

$$E_{k,p}(t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_{k,p}| \leqslant t\}, \qquad k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m}.$$

При достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$ определим конденсатор как упорядоченную совокупность непересекающихся непустых замкнутых множеств

$$\widehat{C}\left(t,\, D,\, A_{n,m}\right) = \left\{E_0,\, \overline{U}_t,\, E_{1,1}(t), E_{1,2}(t), \ldots, E_{n,m}(t)\right\}, \tag{3.2.8}$$

с предписанными значениями $0, \left(\frac{n}{2}\right), 1, 1, \ldots, 1$. Емкостью конденсатора $\widehat{C}\left(t,\, D,\, A_{n,m}\right)$ называется величина (см. [110, 112])

$$\operatorname{cap} \widehat{C}\left(t,\, D,\, A_{n,m}\right) = \inf \iint \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right] dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0$, $G\Big|_{\overline{U}_t} = \frac{n}{2}$, $G\Big|_{E_{k,p}(t)} = 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Величина, обратная емкости конденсатора $C$, называется модулем этого конденсатора

$$\mid C \mid = [\operatorname{cap} C]^{-1} \tag{3.2.9}$$

Рассмотрим конденсаторы $(t < R)$

$$\widehat{C_l^{(R)}}\left(t,\, D,\, A_{n,m}\right) = \left(E_0^{(l)}(R),\, E_1^{(l)}(t, R),\, E_{l,1}(t, R), \ldots, E_{l,m}(t, R),\right.$$

$$E_{l+1,1}(t,R),\ E_{l+1,2}(t,R),\ldots,E_{l+1,m}(t,R)\big), \tag{3.2.10}$$

где

$$E_0^{(l)}(R)=\zeta_l^{(R)}\left(E_0\bigcap\overline{P}_l^0(A_{n,m})\right)\bigcup\left[\zeta_l^{(R)}\left(E_0\bigcap\overline{P}_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$E_1^{(l)}(t,R)=\zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t\bigcap\overline{P}_l^0(A_{n,m})\right)\bigcup\left[\zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t\bigcap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$E_{k,p}(t,R)=\zeta_l^{(R)}\left(E_{k,p}(t)\bigcap\overline{P}_l^0(A_{n,m})\right)\bigcup\left[\zeta_l^{(R)}\left(E_{k,p}(t)\bigcap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*, \tag{3.2.11}$$

$k=l,l+1$, $l=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, $\zeta=\zeta_l^{(R)}$ — функция (2.2.12), $P^0(A_{n,m})=\left\{P_k^0(A_{n,m})\right\}_{k=1}^n$ — система углов, введеная в п. 2.2, $[A]^*=\left\{w\in\overline{\mathbb{C}}:\ \frac{1}{\overline{w}}\in A\right\}$ $\forall A\subset\overline{\mathbb{C}}$. Таким образом, при разделяющем преобразовании конденсатора $\widehat{C}\,(t,\,D,\,A_{n,m})$, ему сопоставляется набор конденсаторов $\left\{\widehat{C_l^{(R)}}\,(t,\,D,\,A_{n,m})\right\}_{l=1}^n$, симметричных относительно $\partial U=\{w:\ |w|=1\}$. Каждому конденсатору $\widehat{C_l^{(R)}}\,(t,\,D,\,A_{n,m})$, $l=\overline{1,n}$, при достаточно малых $t\in\mathbb{R}^+$, $t<R$ сопоставляем класс $V_l$ — всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G=G(z)$ таких, что $G=0$ в окрестности множества $E_0^{(l)}(t,R)$, $G\Big|_{E_1^{(l)}(t,R)}=\frac{n}{2}$, $G\Big|_{E_{k,p}^{(l)}(t,R)}=1$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$. Применяя разделяющее преобразование [110, 112], получаем неравенство

$$\operatorname{cap}\widehat{C}\,(t,D,A_{n,m})\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\operatorname{cap}\widehat{C_k^{(R)}}\,(t,D,A_{n,m})\,. \tag{3.2.12}$$

Отсюда следует, что

$$|\widehat{C}\,(t,D,A_{n,m})\,|\leqslant 2\left(\sum_{l=1}^n|\widehat{C_l^{(R)}}\,(t,D,A_{n,m})\,|^{-1}\right)^{-1}. \tag{3.2.13}$$

Из теоремы 1 [111] вытекает асимптотика модуля $\widehat{C}\,(t,D,A_{n,m})$, аналогичная формуле (3.1.37)

$$|\widehat{C}\,(t,D,A_{n,m})\,|=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{n^2+4nm}\right)\log\frac{1}{t}+\widehat{M}(D,A_{n,m})+o(1), \qquad t\to 0, \quad (3.2.14)$$

где

$$\widehat{M}(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{n^2+4nm}\right)^2\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,p})+\frac{n^2}{4}\log r(D,0)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m} n g_D(0,a_{k,p})+\sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right]. \qquad (3.2.15)$$

Используя формулы (3.1.3), (3.1.4) и тот факт, что $D$ удовлетворяет второму условию неналегания относительно системы $A_{n,m}$, получим асимптотические соотношения для модулей конденсаторов $\widehat{C}_l^{(R)}(t,D,A_{n,m})$, $l=\overline{1,n}$

$$|\widehat{C_l^{(R)}}(t,D,A_{n,m})\,| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n+4m}\right)\log\frac{1}{t}+\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+o(1), \qquad t\to 0, \quad (3.2.16)$$

где

$$\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n+4m}\right)^2\left[\log\frac{r\left(\Omega_0^{(l)}(R),1\right)}{\left(\frac{2}{R^{\frac{n}{2}}}\right)}+\right. \qquad (3.2.17)$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\right)\cdot r\left(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\right)}{\left\{\left[\alpha_l\chi\left(\mid\frac{a_{l,p}}{R}\mid^{\frac{1}{\alpha_l}}\right)|a_{l,p}|\right]\left[\alpha_l\chi\left(\mid\frac{a_{l+1,p}}{R}\mid^{\frac{1}{\alpha_l}}\right)|a_{l+1,p}|\right]\right\}^{-1}}\right], \quad l=\overline{1,n}.$$

Из равенства (3.2.16), при $t\to 0$, получаем

$$|\widehat{C_l^{(R)}}(t,D,A_{n,m})\,| =$$

$$= \frac{\pi(n+4m)}{\log\frac{1}{t}}\left(1+\frac{\pi(n+4m)}{\log\frac{1}{t}}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\pi(n+4m)}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{\pi(n+4m)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right). \tag{3.2.18}$$

Непосредственно из (3.2.18) следует, что

$$\sum_{l=1}^{n}|\widehat{C_l^{(R)}}(t,D,A_{n,m})|^{-1} =$$

$$= \frac{\pi n(n+4m)}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{\pi(n+4m)}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\sum_{l=1}^{n}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+ \tag{3.2.19}$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right), \qquad t\to 0.$$

Используя (3.2.19), приходим к следующему асимптотическому представлению:

$$\left[\sum_{l=1}^{n}|\widehat{C_l^{(R)}}(t,D,A_{n,m})|^{-1}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{\log\frac{1}{t}}{\pi n(n+4m)}\times$$

$$\times\left(1-\frac{\pi(n+4m)}{n}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\sum_{l=1}^{n}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{-1}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\pi n(n+4m)}\log\frac{1}{t}+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+o(1), \qquad t\to 0. \tag{3.2.20}$$

Неравенства (3.2.12) и (3.2.13) с учетом (3.2.14) и (3.2.20) приводят к следующему соотношению:

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{4}{n^2+4nm}\log\frac{1}{t}+\widehat{M}(D,A_{n,m})+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi n(n+4m)}\log\frac{1}{t}+\frac{2}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m})+o(1), \qquad t\to 0. \tag{3.2.21}$$

Сокращая особенности и переходя в (3.2.21) к пределу при $t\to 0$, сразу же будем иметь

$$\widehat{M}(D,A_{n,m})\leqslant\frac{2}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\widehat{M_l^{(R)}}(D,A_{n,m}). \tag{3.2.22}$$

Подставляя в (3.2.22) выражения (3.2.15) и (3.2.17), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{4}{n(n+4m)}\right]^2\left\{\log\left[r(D,0)\right]^{\frac{n^2}{4}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}ng_D(a_{k,p},0)+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{2}{n^2}\left(\frac{2}{n+4m}\right)^2\cdot\left[\sum_{l=1}^{n}\log\frac{r\left(\Omega_0^{(l)}(R),1\right)}{\left(\frac{2}{R^{\frac{n}{2}}}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{p=1}^{m}\frac{r\left(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\right)\cdot r\left(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\right)}{\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2\chi\left(\mid\frac{a_{l,p}}{R}\mid^{\frac{n}{2}}\right)\cdot\chi\left(\mid\frac{a_{l+1,p}}{R}\mid^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l,p}|\cdot|a_{l+1,p}|\right]^{-1}}\right].$$

Окончательно получаем

$$[r(D,0)]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp ng_D(a_{k,p},0)\prod_{(k,p)\neq(s,q)}\exp g_D(a_{k,p},a_{s,q})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\prod_{l=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\mid\frac{a_{l,p}}{R}\mid^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l,p}|\cdot\left(\frac{1}{2}R^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}\left[r\left(\Omega_0^{(l)},1\right)\prod_{p=1}^{m}r\left(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\right)r\left(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\cdot 2^{-\frac{n}{2}}R^{\frac{n^2}{4}}\cdot\left(\frac{4}{2m+1}\right)^{\frac{2m+1}{2}}\cdot M_R\left(A_{n,m}\right)=$$

$$=\left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm}\cdot\left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}}R^{\frac{n^2}{4}}\cdot M_R\left(A_{n,m}\right). \qquad (3.2.23)$$

Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

**3.2.3. Некоторые следствия.** По-видимому, $(n,1)$-равнолучевые системы в аналогичных задачах впервые появились в работе [111]. Пусть $D^{(2)}$ и $A_{n,m}^{(2)}=\{a_{n,m}^{(2)}\}$ суть, соответственно, объединение всех круговых областей и совокупность всех ненулевых полюсов квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-1}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}\right]^2}dw^2. \qquad (3.2.24)$$

В этом случае установлен следующий результат.

**Следствие 3.2.1.** *Пусть* $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$*-равнолучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *такой, что* $M_R(A_{n,m})=M_R(A_{n,m}^{(2)})$, *и любого открытого множества* $D$, $\{0\}\bigcup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего второму условию station неналегания относительно системы* $A_{n,m}$, *справедливо неравенство*

$$[r(D,0)]^{(\frac{n}{2})^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D,a_{k,p}\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp ng_D(0,a_{k,p})\times$$

$$\times\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s})\leqslant\left[r(D^{(2)},0)\right]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D^{(2)},a_{k,p}^{(2)}\right).$$

*Знак равенства в нем достигается, когда* $\{0\}\bigcup A_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и* $D$ *есть, соответственно, совокупность всех полюсов* *и объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-1}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1} - (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}\right]^2}\, dw^2.$$

**Следствие 3.2.2.** *Пусть* $R \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$*-равнолучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $M_R(A_{n,m}) = M_R(A^{(2)}_{n,m})$, *и любого открытого множества* $D$, $\{0\} \bigcup A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего второму условию неналегания относительно системы* $A_{n,m}$, *справедливо неравенство*

$$[r(D,0)]^{(\frac{n}{2})^2} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D, a_{k,p}\right) \leqslant \left[r(D^{(2)},0)\right]^{(\frac{n}{2})^2} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D^{(2)}, a^{(2)}_{k,p}\right).$$

*Знак равенства в нем достигается, когда* $\{0\} \bigcup A_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и* $D$ *есть, соответственно, совокупность всех полюсов и объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(R^n + w^n)^{2m-1}}{\left[(R^{\frac{n}{2}} - iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1} - (R^{\frac{n}{2}} + iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}\right]^2}\, dw^2.$$

**Следствие 3.2.3.** *Пусть* $R \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$*-равнолучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, *и любого открытого множества* $D$, $\{0\} \bigcup A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего второму условию неналегания относительно системы* $A_{n,m}$, *справедливо неравенство*

$$[r(D,0)]^{(\frac{n}{2})^2} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(D, a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{2m+1}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{8}{n(2m+1)}\right)^{nm} \cdot R^{\frac{n^2}{4}} \cdot M_R\left(A_{n,m}\right).$$

*Знак равенства в нем достигается, когда* $\{0\}\bigcup A_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и* $D$ *есть, соответственно, совокупность всех полюсов и объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m-1}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+1}\right]^2}\,dw^2.$$

## 3.3 Оценки функционалов третьего типа для равнолучевых систем точек

### 3.3.1. Разделяющее преобразование для случая неналегающих областей и равнолучевых систем.

**Теорема 3.3.1**. *Пусть* $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. *Тогда, каковы бы ни были* $(n,m)$-*равнолучевая система точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и набор взаимно непересекающихся областей* $B_0$, $\{B_{k,p}\}$, $B_\infty$ *такие, что* $0\in B_0$, $a_{k,p}\in B_{k,p}$, $\infty\in B_\infty$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *справедливо неравенство*

$$[r\,(B_0,0)\cdot r\,(B_\infty,\infty)]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\,(B_{k,p},a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^n\cdot\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot M_R(A_{n,m}). \tag{3.3.1}$$

*Знак равенства в (3.3.1) достигается тогда и только тогда, когда* $0$, $\{a_{k,p}\}$, $\infty$ *и* $\widetilde{B}_0$, $\left\{\widetilde{B}_{k,p}\right\}$, $\widetilde{B}_\infty$ *для всех* $k=\overline{1,n}$ *и* $p=\overline{1,m}$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-w^{n-2}\frac{(R^n+w^n)^{2m}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}\right]^2}\,dw^2. \tag{3.3.2}$$

***Доказательство.*** Все рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3.1.1, остаются в силе и здесь. Но, ввиду того, что в теореме 3.1.2 рассматриваются равнолучевые системы точек, формулы приобретают более специализированный вид. Например, выражения (2.2.12), (3.1.1), (3.1.4) будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
\check{\zeta}_k^R = \check{\zeta}_k^R(w) = \frac{R^{\frac{n}{2}} - (-1)^k i w^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}} + (-1)^k i w^{\frac{n}{2}}}, \quad k = \overline{1,n},\ w \in \overline{P}_k^0, \\
P_k^0 = \left\{ w \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \frac{2\pi}{n}(k-1) < \arg w < \frac{2\pi}{n} k \right\}.
\end{gathered} \tag{3.3.3}$$

Коэффициенты разделяющего преобразования в точках $w = a_{k,p}$ определяются из соотношений:

$$\begin{gathered}
\mid \check{\zeta}_k^R(w) - \check{\zeta}_k^R(a_{k,p}) \mid \sim \left[ \frac{2}{n} \chi \left( \mid \frac{a_{k,p}}{R} \mid^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \right]^{-1} |w - a_{k,p}|, \\
w \to a_{k,p},\ w \in \overline{P}_k^0, \\
\mid \check{\zeta}_k^R(w) - \check{\zeta}_k^R(a_{k,p}) \mid \sim \left[ \frac{2}{n} \chi \left( \mid \frac{a_{k,p}}{R} \mid^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \right]^{-1} |w - a_{k,p}|, \\
w \to a_{k,p},\ w \in \overline{P}_{k-1}^0.
\end{gathered} \tag{3.3.4}$$

Коэффициенты разделяющего преобразования в точках $w = 0$ и $w = \infty$ могут быть определены из следующих асимптотических равенств:

$$\begin{gathered}
\mid \check{\zeta}_k^R(w) - 1 \mid \sim \frac{2}{R^{\frac{n}{2}}} |w|^{\frac{n}{2}}, \quad w \to 0,\ w \in \overline{P}_k^0,\ k = \overline{1,n} \\
\mid \check{\zeta}_k^R(w) + 1 \mid \sim 2 R^{\frac{n}{2}} |w|^{-\frac{n}{2}}, \quad w \to \infty,\ w \in \overline{P}_k^0,\ k = \overline{1,n}
\end{gathered} \tag{3.3.5}$$

Учитывая (3.3.3) – (3.3.5), получаем из (3.1.5) – (3.1.7)

$$\begin{gathered}
r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant \frac{2}{n} \chi \left( \mid \frac{a_{k,p}}{R} \mid^{\frac{n}{2}} \right) |a_{k,p}| \times \\
\times \left[ r\left( \Omega_{k,p}^{(1)}(R), \omega_{k,p}^{(1)}(R) \right) \cdot r\left( \Omega_{k-1,p}^{(2)}(R), \omega_{k-1,p}^{(2)}(R) \right) \right]^{\frac{1}{2}},
\end{gathered} \tag{3.3.6}$$

$$r\left(B_0;0\right) \leqslant 2^{-\frac{2}{n}} \cdot R \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)\right]^{\frac{2}{n^2}}, \tag{3.3.7}$$

$$r\left(B_\infty,\infty\right) \leqslant 2^{-\frac{2}{n}} \cdot R^{-1} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\right]^{\frac{2}{n^2}}, \tag{3.3.8}$$

С учетом соотношений (3.3.3) – (3.3.8), из неравенства (3.1.8) леммы 3.1.1 при $\sigma = \delta = \frac{n^2}{4}$, $\gamma_{k,p} = 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, имеем оценку

$$\left[r\left(B_0,0\right) \cdot r\left(B_\infty,\infty\right)\right]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2} \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{nm} \cdot \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} \chi\left(\mid \frac{a_{k,p}}{R} \mid^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,p}| \times \tag{3.3.9}$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right) r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right) \prod_{p=1}^{m}\prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Знак равенства в (3.3.9) достигается тогда и только тогда, когда в неравенствах (3.3.6), (3.3.7) и в (3.3.8) при всех $k = \overline{1,n}$ и $p = \overline{1,m}$ реализуется знак равенства. Из неравенства (3.1.9) леммы 3.1.2 получаем соотношение

$$r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right) r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right) \times$$

$$\times \prod_{p=1}^{m}\prod_{s=1}^{2} r\left(\Omega_{k,p}^{(s)}(R),\omega_{k,p}^{(s)}(R)\right) \leqslant \left(\frac{2}{m+1}\right)^{2(m+1)}. \tag{3.3.10}$$

Знак равенства в (3.3.10) реализуется, тогда и только тогда, когда точки 1, $-1$, $\omega_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и области $\widetilde{\Omega}_0^{(k)}(R)$, $\widetilde{\Omega}_\infty^{(k)}(R)$, $\widetilde{\Omega}_{k,p}^{(s)}(R)$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, $s = 1,2$, являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{\zeta^{2m}d\zeta^2}{(\zeta^{2m+2}-1)^2}. \tag{3.3.11}$$

Из неравенств (3.3.9) и (3.3.10) следует оценка

$$[r\left(B_0,0\right)\cdot r\left(B_\infty,\infty\right)]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2^{-n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^{nm}\cdot\left(\frac{2}{m+1}\right)^{n(m+1)}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\,\frac{a_{k,p}}{R}\,\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|= \qquad (3.3.12)$$

$$=\left(\frac{n}{4}\right)^{n}\cdot\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot M_R\left(A_{n,m}\right).$$

Знак равенства в (3.3.12) достигается только тогда, когда знак равенства реализуется во всех неравенствах (3.3.6) – (3.3.8) и (3.3.10) одновременно.

Круговыми областями квадратичного дифференциала (3.3.11) являются углы

$$\widehat{D}_q=\left\{\zeta\in\mathbb{C}\backslash\{0\}:\ \frac{\pi}{2(m+1)}(2q-3)<\arg\zeta<\frac{\pi}{2(m+1)}(2q-1)\right\},$$

$q=\overline{1,2(m+1)}$. Пусть $\widehat{\Delta}_q=U_1\bigcap\widehat{D}_q$, $q=\overline{1,2(m+1)}$. Очевидно, что секторы $\widehat{\Delta}_1$ и $\widehat{\Delta}_{m+2}$ обладают симметрией относительно вещественной оси. Остальные секторы разбиваются на пары, взаимно симметричные относительно вещественной оси:

$$\zeta\in\widehat{\Delta}_q\Leftrightarrow\overline{\zeta}\in\widehat{\Delta}_{2(m+2)-q},\ q=\overline{2,(m+1)}.$$

Как следует из (3.1.17), функции

$$w_k^{(0)}=R\,e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)}\left(i\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{\frac{2}{n}},\quad k=\overline{1,n}, \qquad (3.3.13)$$

реализуют конформное отображение круга $U$ на $P_k^0$. Из формул (3.1.18), (3.3.13) получаем

$$\widetilde{B}_{k,p}\bigcap P_k^{(0)}=w_k^{(0)}\left(\widehat{\Delta}_{p+1}\right),\quad \widetilde{B}_{k+1,p}\bigcap P_k^{(0)}=w_k^{(0)}\left(\widehat{\Delta}_{2m+3-p}\right),$$

$$\widetilde{B}_0\bigcap P_k^{(0)}=\widehat{w}_k\left(\widehat{\Delta}_1\right),\quad \widetilde{B}_\infty\bigcap P_k^{(0)}=\widehat{w}_k\left(\widehat{\Delta}_{m+2}\right), \qquad (3.3.14)$$

$$p=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,n},\quad B_{n+1,p}:=B_{1,p}.$$

В случае реализации знака равенства в (3.3.12) повторим рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3.1.1, приходим к равенствам

$$r(B_{k,p},a_{k,p})=r(\widetilde{B}_{k,p},a_{k,p}),$$

$$r(B_0,0)=r(\widetilde{B}_0,0),\quad r(B_\infty,\infty)=r(\widetilde{B}_\infty,\infty),$$

$$k=\overline{1,n},\ p=\overline{1,m}.$$

Далее,

$$g_{B_\infty}(w,\infty)=\ln|w|+\ln r(B_\infty,\infty)+o(1),$$

$$w\to\infty,$$

$$g_{\widetilde{B}_\infty}(w,\infty)=\ln|w|+\ln r(\widetilde{B}_\infty,\infty)+o(1),$$

$$w\to\infty,\quad k=\overline{1,n},\quad p=\overline{1,m}.$$

Тогда $h_\infty(w)=g_{\widetilde{B}_\infty}(w,\infty)-g_{B_\infty}(w,\infty)\geqslant 0$ на множестве всех регулярных точек $\partial B_\infty$. Следовательно, $h\geqslant 0$ всюду в $B_\infty$. С другой стороны, $h_\infty(\infty)=0$. И значит, $h_\infty(w)\equiv 0$ в $B_\infty$. Отсюда получаем, что cap $\widetilde{B}_\infty\backslash B_\infty=0$. Аналогичные рассуждения справедливы для $B_0$ и $B_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$. Таким образом, из условий реализации знака равенства в (3.3.7) – (3.3.8) и (3.3.10), с учетом (3.3.12) – (3.3.14) и аналогично подразделу 3.1.1, получаем, что точки $a_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, система областей $\widetilde{B}_0$, $\{\widetilde{B}_{k,p}\}$, $\widetilde{B}_\infty$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-2\left(\frac{n}{4}\right)^2R^n\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}\right]^2}dw^2. \tag{3.3.15}$$

Теорема доказана.

**3.3.2. Оценки функционалов третьего типа для открытых множеств.** Сформулируем результат аналогичный теореме 3.2.2.

**Теорема 3.3.2**. *Пусть $R\in\mathbb{R}^+$, $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Тогда для любой $(n,m)$-равнолучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=$*

$\overline{1,m}$, *и любого открытого множества* $D$, $\{0,\infty\}\bigcup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего третьему условию неналегания относительно системы* $A_{n,m}$, *справедливо неравенство*

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\frac{n^2}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r\left(D,a_{k,p}\right)\times$$

$$\times\left[\exp\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp ng_D(0,a_{k,p})\times\right.$$

$$(3.3.16)$$

$$\left.\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp ng_D(\infty,a_{k,p})\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right]\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^n\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot M_R(A_{n,m}).$$

*Знак равенства в нем достигается, в частности, когда* $\{0,\infty\}\bigcup A_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *и* $D$ *есть, соответственно, совокупность всех полюсов и объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}\right]^2}\,dw^2.$$

***Доказательство.*** В силу того, что $D$ удовлетворяет третьему условию неналегания, область $D$ обладает обобщенной функцией Грина $g_D(z,a)$ $\forall a\in D$. Будем рассматривать множества

$$E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash D;\qquad \overline{U}_t=\{w\in\mathbb{C}:\,|w|\leqslant t\}\,,$$

$$\overline{U}_t^{(1)}=\left\{w\in\mathbb{C}:\,|w|\geqslant\frac{1}{t}\right\},$$

$$E_{k,p}(t)=\{w\in\mathbb{C}:\,|w-a_{k,p}|\leqslant t\}\,,\qquad k=\overline{1,n},\quad p=\overline{1,m}.$$

При достаточно малых $t\in\mathbb{R}^+$ рассмотрим конденсатор, образованный упорядоченной совокупностью замкнутых множеств,

$$\widehat{\widehat{C}}\,(t,\,D,\,A_{n,m})=\left\{E_0,\,\overline{U}_t,\,\overline{U}_t^{(1)},\,E_{1,1}(t),\ldots,E_{n,m}(t)\right\},\qquad(3.3.17)$$

с предписанными значениями $0, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 1, 1, \ldots, 1$. Емкостью конденсатора (3.3.17) называется величина

$$\operatorname{cap} \widehat{\widehat{C}}\,(t,\, D,\, A_{n,m}) = \inf \iint \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right]\, dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0$, $G\Big|_{\overline{U}_t} = \frac{n}{2}$, $G\Big|_{\overline{U}_t^{(1)}} = \frac{n}{2}$, $G\Big|_{E_{k,p}} = 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Модуль конденсатора (3.3.17) $|\widehat{\widehat{C}}|$ определим выражением

$$|\,\widehat{\widehat{C}}\,| = \left[\operatorname{cap}\widehat{\widehat{C}}\right]^{-1} \tag{3.3.18}$$

Рассмотрим конденсаторы при достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$

$$\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}\,(t,\, D,\, A_{n,m}) =$$

$$= \left(E_0^{(l)}(R), E_1^{(l)}(t,R), E_2^{(l)}(t,R), E_{1,1}^{(l)}(t,R), \ldots, E_{n,m}^{(l)}(t,R),\right), \tag{3.3.19}$$

где

$$E_0^{(l)}(R) = \zeta_l^{(R)}\left(E_0 \bigcap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \bigcup \left[\zeta_l^{(R)}\left(E_0 \bigcap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$E_1^{(l)}(t,R) = \zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t \bigcap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \bigcup \left[\zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t \bigcap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$(3.3.20)$$

$$E_2^{(l)}(t,R) = \zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t^{(1)} \bigcap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \bigcup \left[\zeta_l^{(R)}\left(\overline{U}_t^{(1)} \bigcap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$$E_{k,p}^{(l)}(t,R) = \zeta_l^{(R)}\left(E_{k,p}(t) \bigcap \overline{P}_l^0(A_{n,m})\right) \bigcup \left[\zeta_l^{(R)}\left(E_{k,p}(t) \bigcap P_l^0(A_{n,m})\right)\right]^*,$$

$\zeta = \zeta_k^{(l)}$ — функция (2.2.2), $\zeta_k^{(l)}(\Delta)$ — образ множества $\Delta$ при отображении функции $\zeta_k^{(l)}$, $l, k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Таким образом, при разделяющем преобразовании относительно систем углов $\left\{P_l^{(0)}(A_{n,m})\right\}_{l=1}^n$ и системы функций $\left\{\zeta_l^{(R)}\right\}_{l=1}^n$, $R \in \mathbb{R}^+$, конденсатору $\widehat{\widehat{C}}\,(t,\, D,\, A_{n,m})$

сопоставляется набор конденсаторов $\left\{\widehat{C_l^{(R)}}(t,\,D,\,A_{n,m})\right\}_{l=1}^{n}$, симметричных относительно $\partial U_1=\{w:\,|w|=1\}$. Каждому конденсатору $\widehat{C_l^{(R)}}(t,\,D,\,A_{n,m})$, $l=\overline{1,n}$, при достаточно малых $t\in\mathbb{R}^+$, $t<R$, сопоставляем класс $V_l$ — всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G=G(z)$ таких, что $G=0$ в окрестности множества $E_0^{(l)}(t,R)$, $G\Big|_{E_1^{(l)}(t,R)}=\frac{n}{2}$, $G\Big|_{E_2^{(l)}(t,R)}=\frac{n}{2}$, $G\Big|_{E_{k,p}^{(l)}(t,R)}=1$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$. Учитывая работы [110, 112] имеем неравенство

$$\operatorname{cap}\widehat{\widehat{C}}(t,D,A_{n,m})\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap}\widehat{C_k^{(R)}}(t,D,A_{n,m}).\qquad(3.3.21)$$

Отсюда, в соответствии с (3.3.18), получаем соотношение

$$\operatorname{cap}\left|\widehat{\widehat{C}}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left|\operatorname{cap}\widehat{C_k^{(R)}}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}.\qquad(3.3.22)$$

В свою очередь, (3.3.22) приводит к неравенству

$$\left|\widehat{\widehat{C}}(t,D,A_{n,m})\right|\leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\widehat{C_k^{(R)}}(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}\right)^{-1}.\qquad(3.3.23)$$

Из теоремы 1 [111] следует асимптотика модуля $\widehat{\widehat{C}}(t,D,A_{n,m})$. Она будет аналогична формуле (3.1.37):

$$\left|\widehat{\widehat{C}}(t,D,A_{n,m})\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)\log\frac{1}{t}+\widehat{\widehat{M}}(D,A_{n,m})+o(1),\qquad t\to 0,\quad(3.3.24)$$

где

$$\widehat{\widehat{M}}(D,A_{n,m})=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)^2\left[\frac{n^2}{4}\log r(D,0)r(D,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\log r(D,a_{k,p})+\right.$$

$$+\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}n\left(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p})\right) \tag{3.3.25}$$

$$\left.+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right].$$

Учитывая формулы (3.1.3), (3.1.4), третье условие неналегания и теорему 1 работы [111], установим асимптотические равенства для модулей конденсаторов $\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}(t,D,A_{n,m})$, $l=\overline{1,n}$, а именно:

$$\left|\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}\,(t,D,A_{n,m})\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+2m}\right)\log\frac{1}{t}+\widehat{\widehat{M_l^{(R)}}}(D,A_{n,m})+o(1),\qquad t\to 0, \tag{3.3.26}$$

где

$$\widehat{\widehat{M_l^{(R)}}}(D,A_{n,m})=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+2m}\right)^2\left[\log\frac{r\left(\Omega_0^{(l)}(R),1\right)}{\left(\frac{2}{R^{\frac{n}{2}}}\right)}\,\frac{r\left(\Omega_\infty^{(l)}(R),-1\right)}{\left(2R^{\frac{n}{2}}\right)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{m}\log\frac{r\left(\Omega_{l,p}^{(1)}(R),\omega_{l,p}^{(1)}(R)\right)\cdot r\left(\Omega_{l,p}^{(2)}(R),\omega_{l,p}^{(2)}(R)\right)}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(\left|\frac{a_{l,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l,p}|\right]^{-1}\left[\frac{2}{n}\chi\left(\left|\frac{a_{l+1,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{l+1,p}|\right]^{-1}}\right],\qquad l=\overline{1,n}. \tag{3.3.27}$$

Из равенства (3.3.26) вытекает соотношение:

$$\left|\widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}\,(t,D,A_{n,m})\right|^{-1}=$$

$$=\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\left(1-\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\widehat{\widehat{M_l^{(R)}}}(D,A_{n,m})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^{-1}\right)\right)=$$

$$= \frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}} - \left(\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 \widehat{\widehat{M_l^{(R)}}}(D, A_{n,m}) + o\left(\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2}\right),$$

$$t \to 0, \quad l = \overline{1, n}.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\sum_{l=1}^{n} \left| \widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}(t, D, A_{n,m}) \right|^{-1} =$$

$$= \frac{4\pi nm}{\log\frac{1}{t}} - \left(\frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 \sum_{l=1}^{n} \widehat{\widehat{M_l^{(R)}}}(D, A_{n,m}) + \tag{3.3.28}$$

$$+ o\left(\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2}\right), \qquad t \to 0.$$

После некоторых вычислений, связанных с (3.3.28), приходим к следующему соотношению:

$$\left[\sum_{l=1}^{n} \left| \widehat{\widehat{C_l^{(R)}}}(t, D, A_{n,m}) \right|^{-1}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi nm} \left(1 - \frac{4\pi m}{\log\frac{1}{t}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\widehat{M_k^{(R)}}}(D, A_{n,m}) + o\left(\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4\pi nm} \log\frac{1}{t} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\widehat{M_k^{(R)}}}(D, A_{n,m}) + o(1), \qquad t \to 0. \tag{3.3.29}$$

Из (3.3.21) – (3.3.29) имеем неравенство

$$\widehat{\widehat{M}}(D, A_{n,m}) + o(1) \leqslant \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\widehat{M_k^{(R)}}}(D, A_{n,m}) + o(1),$$

после чего можем записать

$$\widehat{\widehat{M}}(D, A_{n,m}) \leqslant \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \widehat{\widehat{M_k^{(R)}}}(D, A_{n,m}).$$

С учетом (3.3.25) и (3.3.27), приходим к неравенству следующего вида:

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2+2nm}\right)^2\left\{\log\left(r(D,0)r(D,\infty)\right)^{\frac{n^2}{4}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\times\right.$$

$$\times\exp\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp n\left(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p})\right)\times$$

$$\left.\times\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right\}\leqslant\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(n+2m)^2}\times$$

$$\times\log\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{n}\right)^{2m}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)\chi\left(\left|\frac{a_{k+1,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}a_{k+1,p}|\times\right.$$

$$\times r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\times$$

$$\left.\times\prod_{p=1}^{m}r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi n^2(n+2m)^2}\log 2^{-2n}\left(\frac{2}{n}\right)^{2nm}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi^2\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|^2\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{p=1}^{m}r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\right\}.$$

Очевидно, что

$$r\left(\Omega_0^{(k)}(R),1\right)r\left(\Omega_\infty^{(k)}(R),-1\right)\times$$

$$\times\prod_{p=1}^{m}r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}(R),\omega_{k,p}^{(1)}(R)\right)r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}(R),\omega_{k,p}^{(2)}(R)\right)\leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{2m+2}\right)^{2m+2} = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{2(m+1)}.$$

Отсюда легко получаем, что

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{k,p})\times$$

$$\exp\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp n\left(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p})\right)\times$$

$$\times\prod_{(k,p)\neq(s,q)}\exp g_D(a_{k,p},a_{s,q})\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\left(\frac{n}{4}\right)^{2n}\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{(2m+2)n}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi^2\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{n}{4}\right)^{n}\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{R}\right|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|.$$

Теорема 3.3.2 доказана.

**3.3.3. Некоторые следствия.** Пусть $D_{n,m}^{(3)}$ — объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}\right]^2}\,dw^2,$$

где $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $R\in\mathbb{R}^+$. Отметим, что $A_{n,m}^{(3)}=\{a_{k,p}^{(3)}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, определенная соотношениями (2.2.8), является совокупностью всех конечных и ненулевых полюсов этого квадратичного дифференциала.

**Следствие 3.3.1.** *Пусть $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $R\in\mathbb{R}^+$. Тогда для произвольной $(n,m)$-равнолучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и любого открытого множества $D$,*

*$\{0,\infty\}\bigcup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего третьему условию неналегания относительно $A_{n,m}$, выполняется неравенство*

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^n\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot M_R(A_{n,m}),$$

*знак равенства в котором достигается, в частности, когда точки $0$, $\infty$, $\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, и открытое множество $D$ являются, соответственно, совокупностью всех полюсов $\{0,\infty\}\bigcup A^{(3)}_{n,m}$ и объединением всех круговых областей квадратичного дифференциала $D^{(3)}_{n,m}$.*

***Доказательство.*** В силу того, что $g_D(w,a)\geqslant 0$ при всех $w\in\overline{\mathbb{C}}$, $a\in D$, то

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\cdot\exp\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}\exp n(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p}))\cdot\prod_{(k,p)\neq(q,s)}\exp g_D(a_{k,p},a_{q,s})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^n\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot M_R(A_{n,m}).$$

Отсюда и вытекает истинность утверждения следствия 3.3.1.

**Следствие 3.3.2.** *Для любой $(n,m)$-равнолучевой системы точек $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, относительно которой открытое множество $D$, $\{0,\infty\}\bigcup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяет третьему условию неналегания, выполняется неравенство*

$$\exp\left\{\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}n(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p}))+\right.$$

$$+\sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p},a_{q,s})\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\left(\frac{n}{4}\right)^n\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot M_R(A_{n,m})}{[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m} r(D,a_{k,p})},$$

*знак равенства в котором достигается, в частности, когда* $\{0,\infty\}\bigcup A_{n,m}$ *и* $D$ *являются объединением, соответственно, всех полюсов и круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}(R^n+w^n)^{2m}}{\left[(R^{\frac{n}{2}}-iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}-(R^{\frac{n}{2}}+iw^{\frac{n}{2}})^{2m+2}\right]^2}\,dw^2.$$

**Следствие 3.3.3.** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $R\in\mathbb{R}^+$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$*-равнолучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *такой, что* $M_R(A_{n,m})=M_R(A^{(3)}_{n,m})$, *и любого открытого множества* $D$, $\{0,\infty\}\bigcup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего третьему условию неналегания относительно* $A_{n,m}$, *выполняется неравенство*

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m} r(D,a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^n\left(\frac{4}{n(m+1)}\right)^{n(m+1)}\cdot M_R(A^{(3)}_{n,m}).$$

*Знак равенства достигается при тех же условиях, что и в следствии 3.3.1.*

**Следствие 3.3.4.** *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, $R\in\mathbb{R}^+$. *Тогда для произвольной* $(n,m)$*-равнолучевой системы точек* $A_{n,m}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$, *такой, что* $M_R(A_{n,m})=M_R(A^{(3)}_{n,m})$, *и любого открытого множества* $D$, $\{0,\infty\}\bigcup A_{n,m}\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего третьему условию неналегания относительно* $A_{n,m}$, *выпол-*

*няется неравенство*

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})\leqslant$$

$$\leqslant\left[r(D^{(3)}_{n,m},0)r(D^{(3)}_{n,m},\infty)\right]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{m}r(D^{(3)}_{n,m},a^{(3)}_{k,p}).$$

**Следствие 3.3.5.** *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тогда для произвольной $(n,m)$-равнолучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, такой, что $M_R(A_{n,m}) = M_R(A^{(3)}_{n,m})$, и любого открытого множества $D$, $\{0,\infty\}\bigcup A_{n,m} \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего третьему условию неналегания относительно $A_{n,m}$, выполняется неравенство*

$$\exp\left\{\frac{n^2}{2}g_D(0,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}n(g_D(0,a_{k,p})+g_D(\infty,a_{k,p}))+\right.$$

$$\left.+\sum_{(k,p)\neq(q,s)}g_D(a_{k,p},a_{q,s})\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\left[r(D^{(3)},0)r(D^{(3)},\infty)\right]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}r(D^{(3)},a^{(3)}_{k,p})}{[r(D,0)r(D,\infty)]^{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\prod\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{p=1}^{m}r(D,a_{k,p})}.$$

**3.3.4. Некоторые дополнительные результаты для задач третьего типа.** Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, обозначим через $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=\frac{(\beta-\alpha)w^4-2(\beta+\alpha)w^2+(\beta-\alpha)}{(w^4-1)^2}dw^2,$$

содержащие, соответственно, точки 1, $i$, $-1$, $-i$, которые являются полюсами данного квадратичного дифференциала.

Для произвольной $(n,m)$-равнолучевой системы точек $A_{n,m}$ такой, что $m = 2s-1$ $(s \in \mathbb{N})$, рассмотрим "управляющие" функционалы

$$M^{(1)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s} \chi\left(\left|a_{k,2p-1}\right|^{\frac{n}{2}}\right) \cdot |a_{k,2p-1}|,$$

$$M^{(2)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} \chi\left(\left|a_{k,2p}\right|^{\frac{n}{2}}\right) \cdot |a_{k,2p}|.$$

**Теорема 3.3.3**. (Бахтин А.К., Вьюн В.Е., Трохимчук Ю.Ю. [57]). *Пусть $n, m, s \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $m = 2s-1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Тогда для любой $(n,m)$-равнолучевой системы точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, и для произвольного набора взаимно непересекающихся областей $B_0$, $B_{k,p}$, $B_\infty$ таких, что $0 \in B_0$, $a_{k,p} \in B_{k,p}, \infty \in B_\infty$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^{\frac{n^2\alpha}{4}} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s} r^\beta(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} r^\alpha(B_{k,2p}, a_{k,2p}) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha} \left(\frac{2}{n(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{2}n(\alpha+\beta)} \left[M^{(1)}(A_{n,m})\right]^\beta \left[M^{(2)}(A_{n,m})\right]^\alpha \times \tag{3.3.30}$$

$$\times \left[r^\alpha(G_1,1)r^\beta(G_2,i)r^\alpha(G_3,-1)r^\beta(G_4,-i)\right]^{\frac{n(m+1)}{4}},$$

*знак равенства в котором достигается тогда и только тогда, когда точки $0$, $a_{k,p}$, $\infty$ и области $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{B}_{k,p}$, $\widetilde{B}_\infty$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2}(1+w^n)^{m-1}\times$$

$$\times \frac{(\beta-\alpha)\left((1-iw^{n/2})^{2m+2} + (1+iw^{n/2})^{2m+2}\right) - 2(\beta+\alpha)(1+w^n)^{m+1}}{\left[(1-iw^{n/2})^{2m+2} - (1+iw^{n/2})^{2m+2}\right]^2}\, dw^2 \tag{3.3.31}$$

*и* $\operatorname{cap} \widetilde{B}_0 \setminus B_0 = 0$, $\operatorname{cap} \widetilde{B}_{k,p} \setminus B_{k,p} = 0$, $\operatorname{cap} \widetilde{B}_\infty \setminus B_\infty = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$.

***Доказательство.*** Доказательство проводим по схеме, предложенной при доказательстве теоремы 3.3.1 при $R=1$. Здесь обратим особое внимание только на отличительные моменты.

Далее, семейство функций $\zeta_k(w)$ является допустимым для кусочно-разделяющего преобразования областей $B_{k,p}$ относительно семейства углов $P_k^0$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$.

Обозначим через $\Omega_{k,2p-1}^{(1)}$ связную компоненту множества $\zeta_k\left(B_{k,2p-1}\cap\overline{P}_k^0\right)\cup\left(\zeta_k\left(B_{k,2p-1}\cap\overline{P}_k^0\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k,2p-1}^{(1)}$, а через $\Omega_{k,2p-1}^{(2)}$ — связную компоненту множества $\zeta_{k-1}\left(B_{k,2p-1}\cap\overline{P}_{k-1}^0\right)\cup\left(\zeta_{k-1}\left(B_{k,2p-1}\cap\overline{P}_{k-1}^0\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k,2p-1}^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,s}$.

Аналогично обозначим через $\Omega_{k,2p}^{(1)}$ связную компоненту множества $\zeta_k\left(B_{k,2p}\cap\overline{P}_k^0\right)\cup\left(\zeta_k\left(B_{k,2p}\cap\overline{P}_k^0\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k,2p}^{(1)}$, а через $\Omega_{k,2p}^{(2)}$ — связную компоненту множества $\zeta_{k-1}\left(B_{k,2p}\cap\overline{P}_{k-1}^0\right)\cup\left(\zeta_{k-1}\left(B_{k,2p}\cap\overline{P}_{k-1}^0\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega_{k,2p}^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,s-1}$.

Таким образом, результатом разделяющего преобразования области $B_{k,2p-1}$ относительно семейств областей $\left\{P_{k-1}^0,P_k^0\right\}$ и функций $\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ в точке $a_{k,2p-1}$ является пара областей $\Omega_{k-1,2p-1}^{(2)}$ и $\Omega_{k,2p-1}^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,s}$, $\Omega_{0,2p-1}^{(2)}:=\Omega_{n,2p-1}^{(2)}$. Точно так же, результатом разделяющего преобразования области $B_{k,2p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,s-1}$, относительно семейств областей $\left\{P_{k-1}^0,P_k^0\right\}$ и функций $\{\zeta_{k-1},\zeta_k\}$ в точке $a_{k,2p}$ является пара областей $\Omega_{k-1,2p}^{(2)}$ и $\Omega_{k,2p}^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,s-1}$, $\Omega_{0,2p}^{(2)}:=\Omega_{n,2p}^{(2)}$.

Результатом разделяющего преобразования области $B_0$, $0\in B_0\subset\overline{\mathbb{C}}$, относительно семейств функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ и областей $\left\{P_k^0\right\}_{k=1}^n$ в точке $w=0$ является семейство областей $\left\{\Omega_0^{(k)}\right\}_{k=1}^n$, где через $\Omega_0^{(k)}$ обозначим связную компоненту множества $\zeta_k\left(B_0\cap\overline{P}_k^0\right)\cup\left(\zeta_k\left(B_0\cap\overline{P}_k^0\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega=1$, $k=\overline{1,n}$. Аналогично, результатом разделяющего преобразования области $B_\infty$, $\infty\in B_\infty\subset$

$\overline{\mathbb{C}}$, относительно семейств функций $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ и областей $\left\{P_k^0\right\}_{k=1}^n$ в точке $w = \infty$ является набор областей $\left\{\Omega_\infty^{(k)}\right\}_{k=1}^n$, где $\Omega_\infty^{(k)}$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$ обозначает связную компоненту множества $\zeta_k\left(B_\infty \cap \overline{P}_k^0\right) \cup \left(\zeta_k\left(B_\infty \cap \overline{P}_k^0\right)\right)^*$, содержащую точку $\omega = -1$.

Так же, как и соотношения (3.3.6) – (3.3.8), получаем неравенства

$$r(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \leqslant \tag{3.3.32}$$

$$\leqslant \left\{ \frac{r(\Omega_{k,2p-1}^{(1)}, \omega_{k,2p-1}^{(1)}) \cdot r(\Omega_{k,2p-1}^{(2)}, \omega_{k,2p-1}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}| \cdot \frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$p = \overline{1, s}$,

$$r(B_{k,2p}, a_{k,2p}) \leqslant \tag{3.3.33}$$

$$\leqslant \left\{ \frac{r(\Omega_{k,2p}^{(1)}, \omega_{k,2p}^{(1)}) \cdot r(\Omega_{k,2p}^{(2)}, \omega_{k,2p}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}| \cdot \frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|\right]^{-1}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$p = \overline{1, s-1}$,

$$r(B_0, 0) \leqslant \prod_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2}\, r(\Omega_0^{(k)}, 1) \right\}^{\frac{2}{n^2}}, \tag{3.3.34}$$

$$r(B_\infty, \infty) \leqslant \prod_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2}\, r(\Omega_\infty^{(k)}, -1) \right\}^{\frac{2}{n^2}}. \tag{3.3.35}$$

Используя условие теоремы 3.3.3, из неравенств (3.3.32) – (3.3.35) следует цепочка соотношений

$$[r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^{\frac{n^2\alpha}{4}} \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^s r^\beta(B_{k,2p-1}, a_{k,2p-1}) \prod_{k=1}^n \prod_{p=1}^{s-1} r^\alpha(B_{k,2p}, a_{k,2p}) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{2}\, r(\Omega_0^{(k)}, 1) \right)^{\frac{2}{n^2}} \cdot \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{2}\, r(\Omega_\infty^{(k)}, -1) \right)^{\frac{2}{n^2}} \right\}^{\frac{n^2\alpha}{4}} \times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s}\frac{r(\Omega_{k,2p-1}^{(1)},\omega_{k,2p-1}^{(1)})\cdot r(\Omega_{k,2p-1}^{(2)},\omega_{k,2p-1}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|\cdot\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{-1}}\right\}^{\frac{\beta}{2}}\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1}\frac{r(\Omega_{k,2p}^{(1)},\omega_{k,2p}^{(1)})\cdot r(\Omega_{k,2p}^{(2)},\omega_{k,2p}^{(2)})}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|\cdot\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,2p}|\right]^{-1}}\right\}^{\frac{\alpha}{2}}= \tag{3.3.36}$$

$$=\left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha}\left(\frac{2}{n}\right)^{ns(\alpha+\beta)}\left[M^{(1)}(A_{n,m})\right]^{\beta}\left[M^{(2)}(A_{n,m})\right]^{\alpha}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\Bigg[r^{\alpha}(\Omega_0^{(k)},1)r^{\alpha}(\Omega_{\infty}^{(k)},-1)\times$$

$$\times\prod_{p=1}^{s}r^{\beta}(\Omega_{k,2p-1}^{(1)},\omega_{k,2p-1}^{(1)})r^{\beta}(\Omega_{k,2p-1}^{(2)},\omega_{k,2p-1}^{(2)})\times$$

$$\prod_{p=1}^{s-1}r^{\alpha}(\Omega_{k,2p}^{(1)},\omega_{k,2p}^{(1)})r^{\alpha}(\Omega_{k,2p}^{(2)},\omega_{k,2p}^{(2)})\Bigg]^{\frac{1}{2}}.$$

Из способа построения областей $\Omega_{k,2p-1}^{(1)}$, $\Omega_{k,2p-1}^{(2)}$, $\Omega_{k,2p}^{(1)}$, $\Omega_{k,2p}^{(2)}$ и $\Omega_0^{(k)}$, $\Omega_{\infty}^{(k)}$ и соответствующих точек $\omega_{k,2p-1}^{(1)}$, $\omega_{k,2p-1}^{(2)}$, $\omega_{k,2p}^{(1)}$, $\omega_{k,2p}^{(2)}$ и $1$, $-1$ следует, что для каждого $k_0$, $k_0=1,2,\ldots,n$, при всех $p=\overline{1,m}$ области взаимно не пересекаются, а точки лежат на единичной окружности $\partial U$. Таким образом, система указанных точек представляет собой систему из $(2m+2)$ точек, лежащих на единичной окружности $\partial U$, а области образуют систему попарно непересекающихся областей таких, что $\omega_{k,p}^{(1)}\in\Omega_{k,p}^{(1)}$, $\omega_{k,p}^{(2)}\in\Omega_{k,p}^{(2)}$ и $1\in\Omega_0^{(k)}$, $-1\in\Omega_{\infty}^{(k)}$, и удовлетворяют условию теоремы 4.1.2 при всех $k=\overline{1,n}$ и $p=\overline{1,m}$.

Неравенство (4.1.4) для удобства представим в следующем виде:

$$\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_1}(B_{2k-1},a_{2k-1})\cdot r^{\alpha_2}(B_{2k},a_{2k})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{(\alpha_1+\alpha_2)n}\cdot\left(r(B_1^0,1)r(B_3^0,-1)\right)^{\frac{\alpha_1 n}{2}}\cdot\left(r(B_2^0,i)r(B_4^0,-i)\right)^{\frac{\alpha_2 n}{2}}. \tag{3.3.37}$$

Значит, сопоставляя неравенство (3.3.36) и указанные выше рассуждения об образованной системе $(2m+2)$ точек на окружности, с учетом неравенства (3.3.37), а также с учетом обозначений, введенных при формулировке теоремы, приходим к соотношению

$$r^{\alpha}(\Omega_0^{(k)})r^{\alpha}(\Omega_{\infty}^{(k)})\prod_{p=1}^{s} r^{\beta}(\Omega^{(1)}_{k,2p-1},\omega^{(1)}_{k,2p-1})r^{\beta}(\Omega^{(2)}_{k,2p-1},\omega^{(2)}_{k,2p-1})\times$$

$$\times\prod_{p=1}^{s-1} r^{\alpha}(\Omega^{(1)}_{k,2p},\omega^{(1)}_{k,2p})r^{\alpha}(\Omega^{(2)}_{k,2p},\omega^{(2)}_{k,2p})\leqslant \qquad (3.3.38)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{m+1}\right)^{(m+1)(\alpha+\beta)}\cdot\left[r^{\beta}(G_1,1)r^{\beta}(G_3,-1)\cdot r^{\alpha}(G_2,i)r^{\alpha}(G_4,-i)\right]^{\frac{(m+1)}{2}},$$

которое, в свою очередь, окончательно приводит к неравенству

$$\left[r(B_0,0)\cdot r(B_{\infty},\infty)\right]^{\frac{n^2\alpha}{4}}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s} r^{\beta}(B_{k,2p-1},a_{k,2p-1})\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} r^{\alpha}(B_{k,2p},a_{k,2p})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha}\left(\frac{2}{n(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{2}n(\alpha+\beta)}\left[M(A^{(1)}_{n,m})\right]^{\beta}\left[M(A^{(2)}_{n,m})\right]^{\alpha}\times$$

$$\times\left\{r^{\alpha}(G_1,1)r^{\alpha}(G_3,-1)\cdot r^{\beta}(G_2,i)r^{\beta}(G_4,-i)\right\}^{\frac{m+1}{4}n}.$$

Случай реализации знака равенства в неравенстве (3.3.30) исследуется способом, который был предложен при доказательстве теоремы 3.3.1. Приведем только часть его.

Знак равенства в (3.3.38) реализуется в том и только в том случае, когда точки $1,\ -1,\ \omega^{(1)}_{k,p}$ и $\omega^{(2)}_{k,p}$ и области $\widetilde{\Omega}_0^{(k)},\ \widetilde{\Omega}_{\infty}^{(k)},\ \widetilde{\Omega}^{(1)}_{k,p}$ и $\widetilde{\Omega}^{(2)}_{k,p}$ ( при всех $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$) являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(\eta)d\eta^2=\eta^{m-1}\frac{(\beta-\alpha)\eta^{2m+2}-2(\beta+\alpha)\eta^{m+1}+(\beta-\alpha)}{(\eta^{2m+2}-1)^2}\,d\eta^2.$$

Осуществляя в этом квадратичном дифференциале замену переменной $\eta=\frac{1-iw^{\frac{n}{2}}}{1+iw^{\frac{n}{2}}}$, получаем, что области $\widetilde{B}_0,\ \widetilde{B}_{\infty},\ \widetilde{B}_{k,p}$ и точки $0,\ \infty,$

$a_{k,p}$ являются, соответственно, круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала (3.3.31):

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2}(1+w^n)^{m-1}\times$$

$$\times\frac{(\beta-\alpha)\left((1-iw^{n/2})^{2m+2}+(1+iw^{n/2})^{2m+2}\right)-2(\beta+\alpha)(1+w^n)^{m+1}}{\left[(1-iw^{n/2})^{2m+2}-(1+iw^{n/2})^{2m+2}\right]^2}\,dw^2.$$

Теорема 3.3.3 доказана.

# ГЛАВА 4

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ПОЛЮСАМИ НА ОКРУЖНОСТИ

## 4.1 Оценки функционалов первого типа для $n$-лучевых систем точек на окружности

**4.1.1. Основные утверждения.** В четвертой главе рассматриваются новые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности. Первые задачи подобного типа были предложены Г.П. Бахтиной в [69]. С учетом обозначений п. 2.1 положим, как обычно, $\overline{\mathbb{C}}$ — стандартная одноточечная компактификация комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\partial U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\alpha_1$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$. Пусть точки $a_k^0$ и области $B_k^0$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)w^4 - 2(\alpha_2 + \alpha_1)w^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)}{(w^4 - 1)^2}\, dw^2, \qquad (4.1.1)$$

$a_k^0 = i^{k-1} \in B_k^0$ $(k = \overline{1,4})$. Положим

$$I_4^0(\alpha_1, \alpha_2) := 4^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \left(r(B_1^0, a_1^0) \cdot r(B_3^0, a_3^0)\right)^{\alpha_1} \cdot \left(r(B_2^0, a_2^0) \cdot r(B_4^0, a_4^0)\right)^{\alpha_2}.$$

В принятых выше обозначениях справедлива теорема.

**Теорема 4.1.1**. (А.К. Бахтин [39]). *Каковы бы ни были точки $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4 \in \partial U$ и попарно непересекающиеся области $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ такие, что $0 \leqslant \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$, имеет место неравенство*

$$\left(\frac{r(B_1, a_1) \cdot r(B_3, a_3)}{\left|a_1 - a_3\right|^2}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{r(B_2, a_2) \cdot r(B_4, a_4)}{\left|a_2 - a_4\right|^2}\right)^{\alpha_2} \leqslant I_4^0(\alpha_1, \alpha_2). \qquad (4.1.2)$$

*Знак равенства в (4.1.2) достигается в том и только только в том случае, когда выполнены равенства* $\operatorname{cap} \widetilde{B_k} \backslash B_k = 0$ *и существует такое дробно-линейное отображение $S$, являющееся автоморфизмом единичного круга $U$, что $a_k = S(a_k^0)$ и $\widetilde{B}_k = S(B_k^0)$, $k = \overline{1,4}$.*

Доказательству теоремы 4.1.1 представим ряд вспомогательных результатов, а также остановимся на некоторых моментах предыстории вопроса.

Теорема 4.1.1 была установлена А.К. Бахтиным [44] при дополнительном требовании односвязности областей $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$. Поскольку для односвязных областей гиперболического типа внутренний радиус совпадает с конформным, то для этого случая результат теоремы 4.1.1 допускает следующую переформулировку.

**Следствие 4.1.1.** *Каковы бы ни были функции $f_1$, $f_2$, $f_3$, и $f_4$, конформно и однолистно отображающие единичный круг $U$ на попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, и такие, что $|f_1(0)| = |f_2(0)| = |f_3(0)| = |f_4(0)| = 1$, $0 \leqslant \arg f_1(0) < \arg f_2(0) < \arg f_3(0) < \arg f_4(0) < 2\pi$, справедливо неравенство*

$$\left|\frac{f_1'(0)f_3'(0)}{(f_1(0)-f_3(0))^2}\right|^{\alpha_1}\cdot\left|\frac{f_2'(0)f_4'(0)}{(f_2(0)-f_4(0))^2}\right|^{\alpha_2}\leqslant I_4^0(\alpha_1,\alpha_2),$$

*знак равенства в котором достигается в том и только в том случае, когда существует такое дробно-линейное отображение $S$, являющееся автоморфизмом единичного круга $U$, что $f_k(0) = S(a_k^0)$ и $f(B_k) = S(B_k^0)$, $k = \overline{1,4}$.*

Отметим, что такого вида точки $a_k^0$ и области $B_k^0$, $k = \overline{1,4}$, присутствуют в качестве экстремального набора в работе [119]. Пусть точки $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4 \in \partial U$ и попарно непересекающиеся области $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ выбраны такими, что $0 \leqslant \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$. Тогда, используя теорему 4.1.1 и очевидные неравнства $\bigl|a_1-a_3\bigr| \leqslant 2$ и $\bigl|a_2-a_4\bigr| \leqslant 2$, получаем двойное неравенство

$$\begin{gathered}(r(B_1,a_1)\cdot r(B_3,a_3))^{\alpha_1}\cdot(r(B_2,a_2)\cdot r(B_4,a_4))^{\alpha_2}\leqslant\\ \leqslant\left(\frac{r(B_1,a_1)\cdot r(B_3,a_3)}{2^{-2}\bigl|a_1-a_3\bigr|^2}\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\frac{r(B_2,a_2)\cdot r(B_4,a_4)}{2^{-2}\bigl|a_2-a_4\bigr|^2}\right)^{\alpha_2}\leqslant\\ \leqslant 4^{\alpha_1+\alpha_2}M_0(\alpha_1,\alpha_2),\end{gathered}$$

при этом знак равенства в первом неравенстве достигается в том и только в том случае, когда $a_1 = -a_3$ и $a_2 = -a_4$, а во втором — когда имеет место равенство в (4.1.2). Поскольку всякий автоморфизм круга $\mathbb{D}$, переводящий две пары диаметрально противоположных точек в пары точек $\{1, -1\}$ и $\{i, -i\}$, является вращением относительно начала координат $O$, то мы получаем утверждение.

**Следствие 4.1.2** (А.К. Бахтин [28,29]). *Каковы бы ни были точки* $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4 \in \partial U$ *и попарно непересекающиеся области* $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ *такие, что* $0 \leqslant \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ *и* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$, *справедливо неравенство*

$$(r(B_1, a_1) \cdot r(B_3, a_3))^{\alpha_1} \cdot (r(B_2, a_2) \cdot r(B_4, a_4))^{\alpha_2} \leqslant 4^{\alpha_1+\alpha_2} I_4^0(\alpha_1, \alpha_2). \tag{4.1.3}$$

*Знак равенства в (4.1.3) достигается в том и только в том случае, когда выполнены равенства* $\operatorname{cap} \widetilde{B_k} \backslash B_k = 0$ *и существует такое вращение* $S$ *плоскости* $\mathbb{C}$ *относительно начала координат* $O$, *что* $a_k = S(a_k^0)$ *и* $\widetilde{B}_k = S(B_k^0)$, $k = \overline{1,4}$.

В следствии 4.1.2 содержится и результат Г.В. Кузьминой [153], которая доказала неравенство (4.1.3) для случая, когда $a_1 = -a_3 = 1$, $a_2 = e^{i\varphi}$, $a_4 = e^{-i\varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$, а области $B_1$, $B_2$, $B_3$ и $B_4$ — односвязны.

**Следствие 4.1.3.** *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2, \rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$, $a_0 = 0$, $a_\infty = \infty$, $a_1 = i\rho_1$, $a_2 = -i\rho_2$. *Тогда для любой четверки попарно непересекающихся областей* $B_q$, $a_q \in B_q \subset \overline{\mathbb{C}}$, $q \in \{0, 1, 2, \infty\}$, *справедливо неравенство*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^{\alpha_1} \left( \frac{r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)}{|a_1 - a_2|^2} \right)^{\alpha_2} \leqslant I_4^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= \left[ r\left(B_0^{(0)}, 0\right) r\left(B_\infty^{(0)}, \infty\right) \right]^{\alpha_1} \cdot \left( \frac{r\left(B_1^{(0)}, i\rho\right) r\left(B_2^{(0)}, -i\rho\right)}{4\rho^2} \right)^{\alpha_2},$$

$B_q^{(0)}$, $q \in \{0, 1, 2, \infty\}$, *— круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q_1(w)dw^2 = -\frac{w^4 + 2(1 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1})\rho^2 w^2 + \rho^4}{w^2(w^2 + \rho^2)^2} dw^2,$$

$$0 \in B_0^0, \quad \infty \in B_\infty^0, \quad i\rho \in B_1^0, \quad -i\rho \in B_2^0.$$

*Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда* $a_q$ *и* $\widetilde{B}_q$, $q \in \{0,1,2,\infty\}$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала* $Q_1(w)dw^2$, $\operatorname{cap} \widetilde{B}_q \setminus B_q = 0$, $q \in \{0,1,2,\infty\}$.

В следующей теореме $n$ — натуральное число, $n \geqslant 3$.

**Теорема 4.1.2**. *Каковы бы ни были точки* $a_1,\dots,a_{2n} \in \partial U$, $a_{2n+1} := a_1$, *и попарно непересекающиеся области* $B_1,\dots,B_{2n} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *такие, что* $0 \leqslant \arg a_1 < \dots < \arg a_{2n} < 2\pi$, $a_{2k-1} \in B_{2k-1}$ *и* $a_{2k} \in B_{2k} \subset \{z \in \mathbb{C} : \arg a_{2k-1} < \arg z < \arg a_{2k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$, *имеет место неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(r(B_{2k-1},a_{2k-1})\right)^{\alpha_1} \left(r(B_{2k},a_{2k})\right)^{\alpha_2} \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n(\alpha_1+\alpha_2)} \left(I_4^0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{n/2}, \tag{4.1.4}$$

*знак равенства в котором достигается в том и только в том случае, когда выполнены равенства* $\operatorname{cap} \widetilde{B_k} \setminus B_k = 0$ *и существует вращение* $S$ *плоскости* $\mathbb{C}$ *относительно начала координат* $O$, *переводящее точки* $a_k$ *и области* $\widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,2n}$, *соответственно в полюса и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2}\frac{(\alpha_2-\alpha_1)w^{2n} - 2(\alpha_2+\alpha_1)w^n + (\alpha_2-\alpha_1)}{(w^{2n}-1)^2}\,dw^2, \tag{4.1.5}$$

*и такое, что* $S(a_1) = 1$.

В работе [153] показано, что теорема 4.1.2 останется в силе, если в ее формулировке заменить условие $B_{2k} \subset \{z \in \mathbb{C} : \arg a_{2k-1} < \arg z < \arg a_{2k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$, на односвязность всех областей $B_k$. Более общий результат получен в п. 4.2.1, теорема 4.2.2.

**4.1.2. Вспомогательные результаты.** Пусть $G$ — открытое множество в $\mathbb{C}$, $\varphi_0 \in [0,2\pi)$, $(r,\varphi)$ — полярные координаты в проколотой плоскости $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ комплексного переменного $z$: $z = r\exp i\varphi$, $r > 0$, $\varphi \in [0,2\pi)$. Напомним (см., например, [229]), что круговая симметризация множества $G$ с центром в начале координат $O$ относительно луча $l_{\varphi_0} := \{\varphi = \varphi_0\}$ определяется как множество $G^*$, полученное из $G$ следующим образом: $O \in G^* \leftrightarrow O \in G$; для каждого $\rho > 0$ пересечение множества $G^*$ с окружностью $C_\rho := \{r = \rho\}$ состоит либо из окружности $C_\rho$ при $C_\rho \subset G$, либо пусто — при $C_\rho \bigcap G = \varnothing$, если же не выполнен ни один из перечисленных выше случаев, то является дугой $\left\{r = \rho, \left|\varphi - \varphi_0\right| < \frac{d}{2\rho}\right\}$, где $d$ — сумма длин дуг множества $C_\rho \bigcap G$. Отметим следующие свойства круговой симметризации с центром в точке $O$ относительно луча $l_{\varphi_0}$ (см., например, [229]):

1) круговая симметризация открытого множества является открытым множеством;

2) круговая симметризация области $G$ является областью, и для каждой точки $a \in G \bigcap l_{\varphi_0}$ внутренние радиусы области $G$ и симметризованной области $G^*$ удовлетворяют неравенству $r(G, a) \leqslant r(G^*, a)$;

3) круговая симметризация односвязной области $G$ является односвязной областью, при этом, как показал Дж. Дженкинс [303, 304], если $a \in G \bigcap l_{\varphi_0}$, то равенство $r(G, a) = r(G^*, a)$ возможно в том и только в том случае, когда области $G$ и $G^*$ совпадают.

В доказательстве теоремы 4.1.1 будет использован вспомогательный результат, для формулировки которого введем следующие обозначения.

Пусть $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Через $\Delta(\varphi)$ обозначим множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные четверки $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ попарно непересекающиеся односвязных областей в $\overline{\mathbb{C}}$ таких, что $1 \in B_1$, $e^{i\varphi} \in B_2$, $-1 \in B_3$, $e^{-i\varphi} \in B_4$. На множестве $\Delta(\varphi)$ рассмотрим функционал $J$, действие которого на элемент $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4) \in \Delta(\varphi)$ определяется равенством

$$J(\delta) = \left(r(B_1, 1) \cdot r(B_3, -1)\right)^{\alpha_1} \cdot \left(r(B_2, e^{i\varphi}) \cdot r(B_4, e^{-i\varphi})\right)^{\alpha_2}.$$

В принятых обозначениях имеет место лемма.

**Лемма 4.1.1**. *Справедливы следующие утверждения:*

*1) существует единственный элемент* $\delta^0 = (B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0) \in \Delta(\varphi)$ *такой, что*

$$\sup_{\delta \in \Delta(\varphi)} J(\delta) = J(\delta^0);$$

*2) экстремали* $\delta^0$ *соответствует единственный (с точностью до положительного постоянного множителя) квадратичный дифференциал*

$$Q(w)dw^2 = \frac{P(w)}{(w^2-1)^2(w^2-e^{2i\varphi})^2}\,dw^2, \qquad (4.1.6)$$

*где $P(w)$ — полином не выше четвертой степени, при этом точки $a_1^0 = 1$, $a_2^0 = e^{i\varphi}$, $a_3^0 = -1$, $a_4^0 = e^{-i\varphi}$ и области $B_1^0$, $B_2^0$, $B_3^0$, $B_4^0$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (4.1.6), а замыкание множества $\bigcup\limits_{p=1}^{4} B_p^0$ совпадает с расширенной комплексной плоскостью $\overline{\mathbb{C}}$;*

*3) для каждого $p = 1, 2, 3, 4$ в некоторой окрестности точки $a_p^0$ имеет место разложение*

$$Q(w)dw^2 = \left(-\frac{\mu_p}{(w - a_p^0)^2} + \ldots\right) dw^2,$$

*где $\mu_1 = \mu_3 = \alpha_1$, $\mu_2 = \mu_4 = \alpha_2$;*

*4) каждая функция $w = f_p(\zeta)$, $f_p(0) = a_p^0$, реализующая однолистное и конформное отображение единичного круга $U$ на область $B_p^0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$Q(w)dw^2 = -\mu_p \left(\frac{dz}{z}\right)^2, \quad (p = 1, 2, 3, 4);$$

*5) экстремальные области $B_1^0$, $B_2^0$, $B_3^0$ и $B_4^0$ симметричны относительно единичной окружности $\partial U$;*

*6) структура траекторий квадратичного дифференциала (4.1.6) обладает центральной симметрией.*

***Доказательство.*** Вначале рассмотрим следующую вспомогательную задачу: *для заданного $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ на множестве всех пар $(B_1, B_2)$ непересекающихся односвязных областей $B_1 \ni 1$ и $B_2 \ni e^{2i\varphi}$ таких, что $\overline{\mathbb{C}} \backslash (B_1 \bigcup B_2) \supset \{0, \infty\}$ (в дальнейшем мы называем такую пару допустимой), найти точную верхнюю грань $M$ величины $r^{\alpha_1}(B_1, 1) \cdot r^{\alpha_2}(B_2, e^{2i\varphi})$ $(r^{\alpha}(B, a) := [r(B, a)]^{\alpha})$.* Покажем, прежде всего, что $M < \infty$ и

$$M = r^{\alpha_1}(B_1^0, 1) \cdot r^{\alpha_2}(B_2^0, e^{2i\varphi}) \tag{4.1.7}$$

для единственной допустимой пары $(B_1^0, B_2^0)$. С этой целью для произвольной допустимой пары $(B_1, B_2)$ обозначим через $f_1(z)$ и $f_2(z)$ функции, реализующие однолистные и конформные отображения единичного круга $U$ на области $B_1$ и $B_2$ соответственно, при этом

$f_1(0) = 1$, $f_2(0) = e^{2i\varphi}$, $f_k(z) \neq 0 \ \forall\, z \in U$, $k = 1, 2$. По теореме Кебе (см., например, [104]) для каждой точки $w \in \partial f_1(U)$ выполняется неравенство

$$[r(B_1, 1)]^{-1}\big|w - 1\big| \geqslant \frac{1}{4},$$

откуда

$$r(B_1, 1) \leqslant \big|1 - e^{2i\varphi}\big|.$$

Аналогично,

$$r(B_2, e^{2i\varphi}) \leqslant \big|1 - e^{2i\varphi}\big|,$$

и значит,

$$r^{\alpha_1}(B_1, 1) \cdot r^{\alpha_2}(B_2, e^{2i\varphi}) \leqslant \big|1 - e^{2i\varphi}\big|^{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Поскольку последнее справедливо для произвольной допустимой пары $(B_1, B_2)$, то

$$M \leqslant \big|1 - e^{2i\varphi}\big|^{\alpha_1 + \alpha_2} < \infty.$$

Пусть $\{(B_1^n, B_2^n)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность допустимых пар областей, для которой

$$\lim_{n \to \infty} r^{\alpha_1}(B_1^n, 1) \cdot r^{\alpha_2}(B_2^n, e^{2i\varphi}) = M,$$

и пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ функции $f_1^n(z)$ и $f_2^n(z)$ реализуют однолистные и конформные отображения круга $U$ на области $B_1^n$ и $B_2^n$ соответственно, при этом $f_1^n(0) = 1$, $f_2^n(0) = e^{2i\varphi}$, $f_k^n(z) \neq 0$ $\forall\, z \in U$, $k = 1, 2$. Последнее условие означает, что каждая из последовательностей функций $\{f_1^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f_2^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ является нормальным семейством и, по теореме Монтеля (см. [92]), существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что каждая из подпоследовательностей функций $\{f_1^{n(k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{f_2^{n(k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится в круге $U$ либо к некоторой регулярной функции, либо к $\infty$. Случай сходимости к $\infty$ исключается тем, что $f_1^n(0) = 1$ и $f_2^n(0) = e^{2i\varphi}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, поэтому функции $f_1^0(z) = \lim\limits_{k \to \infty} f_1^{n(k)}(z)$ и $f_2^0(z) = \lim\limits_{k \to \infty} f_2^{n(k)}(z)$ регулярны и однолистны в круге $U$, области $B_1^0 = f_1^0(U)$ и $B_2^0 = f_2^0(U)$ не пересекаются и удовлетворяют равенству (4.1.7). Для дальнейшего исследования экстремальной пары $(B_1^0, B_2^0)$ применим известную вариационную формулу

$$w^{\varepsilon} = w + \varepsilon w \frac{(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{(w-w_1)(w-w_2)},$$

(см. [92]), где $w_1, w_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1, e^{2i\varphi}\}$, $w_1 \neq w_2$. Функция $w^{\varepsilon}(w)$ регулярна в $\mathbb{C}\backslash\{w_1, w_2\}$, а $0, 1, e^{2i\varphi}$ — ее неподвижные точки, и при достаточно малых комплексных $\varepsilon$ она будет однолистной в $\mathbb{C}\backslash\{w_1, w_2\}$ (см. [92]). Если же $w_1$ и $w_2$ являются внутренними точками множества $\mathbb{C}\backslash\left(\overline{B_1^0 \bigcup B_2^0}\right)$, то отсюда будет следовать, что при достаточно малых комплексных $\varepsilon$ функции

$$f_1^{\varepsilon}(z) = f_1^0(z) + \varepsilon f_1^0(z) \frac{(f_1^0(z)-1)(f_1^0(z)-e^{2i\varphi})}{(f_1^0(z)-w_1)(f_1^0(z)-w_2)}$$

и

$$f_2^{\varepsilon}(z) = f_2^0(z) + \varepsilon f_2^0(z) \frac{(f_2^0(z)-1)(f_2^0(z)-e^{2i\varphi})}{(f_2^0(z)-w_1)(f_2^0(z)-w_2)}$$

конформно и однолистно отображают круг $U$ соответственно на области $B_1^{\varepsilon}$ и $B_2^{\varepsilon}$, образующие допустимую пару, и

$$\left|(f_1^{\varepsilon})'(0)\right| = \left|(f_1^0)'(0)\right| \left\{1 + \operatorname{Re} \frac{\varepsilon(1-e^{2i\varphi})}{(1-w_1)(1-w_2)}\right\},$$

$$\left|(f_2^{\varepsilon})'(0)\right| = \left|(f_2^0)'(0)\right| \left\{1 + \operatorname{Re} \frac{\varepsilon e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)}\right\}.$$

И отсюда будет вытекать, что

$$r^{\alpha_1}(B_1^{\varepsilon}, 1) \cdot r^{\alpha_2}(B_2^{\varepsilon}, e^{2i\varphi}) = \left|(f_1^{\varepsilon})'(0)\right|^{\alpha_1} \left|(f_2^{\varepsilon})'(0)\right|^{\alpha_2} =$$

$$= \left|(f_1^0)'(0)\right|^{\alpha_1} \left|(f_2^0)'(0)\right|^{\alpha_2} \times$$

$$\times \left\{1 + |\varepsilon| e^{i\theta} \left[\frac{\alpha_1(1-e^{2i\varphi})}{(1-w_1)(1-w_2)} + \frac{\alpha_2 e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)}\right] + O(\varepsilon^2)\right\}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\theta}$. Используя экстремальное свойство пары $(B_1^0, B_2^0)$, заключаем, что при всех $\theta \in [0, 2\pi)$ справедливо равенство

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta}\left[\frac{\alpha_1(1-e^{2i\varphi})}{(1-w_1)(1-w_2)} + \frac{\alpha_2 e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)}\right]\right\} \leqslant 0,$$

и значит,

$$\alpha_1(1-e^{2i\varphi})(w_1-e^{2i\varphi})(w_2-e^{2i\varphi})+$$
$$+\alpha_2 e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)(w_1-1)(w_2-1)=0 \tag{4.1.8}$$

для всех $w_1, w_2$, принадлежащих внутренности множества $\mathbb{C}\setminus\left(\overline{B_1^0\bigcup B_2^0}\right)$. Положим $w_1 = w$, $w_2 = w + h$. Далее, разлагая левую часть равенства (4.1.8) по степеням $w$, непосредственным вычислением находим, что коэффициент при $w^2$ равен $(\alpha_1 - \alpha_2 e^{2i\varphi})(1 - e^{2i\varphi}) \neq 0$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что множество $\mathbb{C}\setminus\left(\overline{B_1^0\bigcup B_2^0}\right)$ не содержит внутренних точек.

Пусть теперь точки $w_1 = f_1(z_1)$ и $w_2 = f_1(z_2)$ принадлежат области $B_1$, $z_1, z_2 \in U$, $z_1 \neq z_2$. Рассмотрим функцию

$$f_{1,\varepsilon}(z) = f_1^0(z) + \varepsilon\frac{f_1^0(z)\left(f_1^0(z)-1\right)\left(f_1^0(z)-e^{2i\varphi}\right)}{\left(f_1^0(z)-w_1\right)\left(f_1^0(z)-w_2\right)} = g_\varepsilon\left(f_1^0(z)\right), \tag{4.1.9}$$

где

$$g_\varepsilon(w) := w + \varepsilon w\frac{(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{(w-w_1)(w-w_2)} = w\left(1+\varepsilon\frac{(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{(w-w_1)(w-w_2)}\right). \tag{4.1.10}$$

При достаточно малых $\varepsilon$ функция (4.1.9) однолистна и регулярна в некотором кольце $r < |z| < 1$ $(r > 0)$. Обозначим через $B_1^\varepsilon$ область, полученнную присоединением к образу кольца $r < |z| < 1$ при отображении $f_{1,\varepsilon}$ замкнутой области, внутренней по отношению к образу окружности $|z| = r$ при этом отображении. Применяя к функции $f_{1,\varepsilon}$ вариационную лемму Г.М. Голузина (см. [92]), заключаем, что существует однолистное конформное отображение $f_1^\varepsilon$ круга $U$ на область $B_1^\varepsilon$ такое, что при всех $z \in U$ справедливо асимптотическое равенство

$$f_1^\varepsilon(z) = f_1^0(z) + \varepsilon\frac{f_1^0(z)\left(f_1^0(z)-1\right)\left(f_1^0(z)-e^{2i\varphi}\right)}{\left(f_1^0(z)-w_1\right)\left(f_1^0(z)-w_2\right)} -$$
$$-\varepsilon z\left(f_1^0\right)'(z)\frac{w_1(w_1-1)(w_1-e^{2i\varphi})}{[z_1\left(f_1^0\right)'(z_1)]^2(w_1-w_2)}\cdot\frac{z_1}{z-z_1} -$$

$$-\varepsilon z\left(f_1^0\right)'(z)\frac{w_2(w_2-1)(w_2-e^{2i\varphi})}{[z_2\left(f_1^0\right)'(z_2)]^2(w_2-w_1)}\cdot\frac{z_2}{z-z_2}+ \tag{4.1.11}$$

$$+\varepsilon z\left(f_1^0\right)'(z)\overline{\frac{w_1(w_1-1)(w_1-e^{2i\varphi})}{[z_1\left(f_1^0\right)'(z_1)]^2(w_1-w_2)}}\cdot\frac{z\overline{z}_1}{1-z\overline{z}_1}+$$

$$+\varepsilon z\left(f_1^0\right)'(z)\overline{\frac{w_2(w_2-1)(w_2-e^{2i\varphi})}{[z_2\left(f_1^0\right)'(z_2)]^2(w_2-w_1)}}\cdot\frac{z\overline{z}_2}{1-z\overline{z}_2}+O(\varepsilon^2),\qquad \varepsilon\to 0.$$

При достаточно малых $\varepsilon$ функция

$$f_2^\varepsilon(z):=g_\varepsilon\left(f_2^0(z)\right)=f_2^0(z)+\varepsilon\frac{f_2^0(z)\left(f_2^0(z)-1\right)\left(f_2^0(z)-e^{2i\varphi}\right)}{\left(f_2^0(z)-w_1\right)\left(f_2^0(z)-w_2\right)} \tag{4.1.12}$$

однолистно отображает круг $U$ на односвязную область $B_2^\varepsilon$, причем из соотношений (4.1.9), (4.1.10) и (4.1.12) очевидным образом следует, что пара $(B_1^\varepsilon, B_2^\varepsilon)$ будет допустимой (при малых $\varepsilon$). Положим, что $k^*=1$ при $k=2$ и $k^*=2$ при $k=1$. Из (4.1.11) и (4.1.12) получаем соотношения

$$\left|\left(f_1^\varepsilon\right)'(0)\right|=\left|\left(f_1^0\right)'(0)\right|\cdot\left|1+\varepsilon\frac{1-e^{2i\varphi}}{(1-w_1)(1-w_2)}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\sum_{k=1}^{2}\frac{f_1^0(z_k)\left(f_1^0(z_k)-1\right)\left(f_1^0(z_k)-e^{2i\varphi}\right)}{(w_k-w_{k^*})\left(z_k\left(f_1^0\right)'(z_k)\right)^2}+O(\varepsilon^2)\right|,\qquad \varepsilon\to 0,$$

$$\left|\left(f_2^\varepsilon\right)'(0)\right|=\left|\left(f_2^0\right)'(0)\right|\cdot\left|1+\varepsilon\frac{e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)}\right|,$$

которые влекут за собой следующую цепочку равенств:

$$r^{\alpha_1}(B_1^\varepsilon,1)\cdot r^{\alpha_2}(B_2^\varepsilon,e^{2i\varphi})=\left|\left(f_1^\varepsilon\right)'(0)\right|^{\alpha_1}\cdot\left|\left(f_2^\varepsilon\right)'(0)\right|^{\alpha_2}=$$

$$=\left|\left(f_1^0\right)'(0)\right|^{\alpha_1}\cdot\left|\left(f_2^0\right)'(0)\right|^{\alpha_2}\times$$

$$\times\left\{1+\operatorname{Re}\varepsilon\left[\alpha_1\frac{1-e^{2i\varphi}}{(1-w_1)(1-w_2)}+\alpha_2\frac{e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{(e^{2i\varphi}-w_1)(e^{2i\varphi}-w_2)}+\right.\right.$$

$$+\alpha_1 \sum_{k=1}^{2} \frac{f_1^0(z_k)\left(f_1^0(z_k)-1\right)\left(f_1^0(z_k)-e^{2i\varphi}\right)}{(w_k-w_{k^*})\left(z_k\left(f_1^0\right)'(z_k)\right)^2}\Bigg] + O(\varepsilon^2)\Bigg\}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Поскольку

$$\left|\left(f_1^0\right)'(0)\right|^{\alpha_1}\left|\left(f_2^0\right)'(0)\right|^{\alpha_2} = r^{\alpha_1}(B_1^0,1)\cdot r^{\alpha_2}(B_2^0,e^{2i\varphi}),$$

то имеет место равенство

$$\alpha_1 \frac{f_1^0(z_1)\left(f_1^0(z_1)-1\right)\left(f_1^0(z_1)-e^{2i\varphi}\right)}{(w_1-w_2)\left(z_1\left(f_1^0\right)'(z_1)\right)^2} -$$

$$-\alpha_1 \frac{f_1^0(z_2)\left(f_1^0(z_2)-1\right)\left(f_1^0(z_2)-e^{2i\varphi}\right)}{(w_1-w_2)\left(z_2\left(f_1^0\right)'(z_2)\right)^2} +$$

$$+\frac{\alpha_1(1-e^{2i\varphi})}{w_1-w_2}\left[\frac{1}{w_2-1}-\frac{1}{w_1-1}\right]+$$

$$+\frac{\alpha_2 e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{w_1-w_2}\left[\frac{1}{w_2-e^{2i\varphi}}-\frac{1}{w_1-e^{2i\varphi}}\right]=0.$$

Осуществим в последнем равенстве замену переменной $w_1 = w + h$, $w_2 = w$ и перейдем к пределу при $h \to 0$. Тогда последовательно получаем:

$$\frac{d}{dw}\left[\alpha_1 \frac{w(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{\left(z\left(f_1^0\right)'(z)\right)^2} - \alpha_1 \frac{1-e^{2i\varphi}}{w-1} - \alpha_2 \frac{e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{w-e^{2i\varphi}}\right]=0,$$

$$\alpha_1 \frac{w(w-1)(w-e^{2i\varphi})}{\left(z\left(f_1^0\right)'(z)\right)^2} = \alpha_1 \frac{1-e^{2i\varphi}}{w-1} + \alpha_2 \frac{e^{2i\varphi}(e^{2i\varphi}-1)}{w-e^{2i\varphi}} + \mathrm{const}.$$

В терминах квадратичных дифференциалов это означает, что функция $w = f_1^0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$-\alpha_1 \frac{dz^2}{z^2} = \frac{P_1(w)dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2},$$

где $P_1$ — полином второй степени, а вблизи точек $w = 1$ и $w = e^{2i\varphi}$ имеют место разложения

$$\frac{P_1(w)dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2} = \left[-\frac{\alpha_1}{(w-1)^2} + \ldots\right] dw^2 \tag{4.1.13}$$

и

$$\frac{P_1(w)dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2} = \left[-\frac{\alpha_2}{(w-e^{2i\varphi})^2} + \ldots\right] dw^2. \tag{4.1.14}$$

Аналогично, функция $w = f_2^0(z)$ удовлетворяет уравнению

$$-\alpha_2 \frac{dz^2}{z^2} = \frac{P_2(w)dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2},$$

где $P_2$ — полином второй степени, и вблизи точек $w = 1$ и $w = e^{2i\varphi}$ имеют место разложения (4.1.14) и (4.1.15) с заменой $P_1$ на $P_2$. Таким образом, области $B_1^0$ и $B_2^0$ являются круговыми областями квадратичных дифференциалов

$$\frac{P_1(w)dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2} \tag{4.1.15}$$

и

$$\frac{P_2(w)dw^2}{w(w-1)^2(w-e^{2i\varphi})^2} \tag{4.1.16}$$

соответственно. Покажем, что на самом деле $P_1 \equiv P_2$ в $\mathbb{C}$. Для этого воспользуемся структурными теоремами для квадратичных дифференциалов (см. [104], а также теоремы 2.1.2, 2.1.4 и 2.1.5 данной работы), применение которых показывает, что общая граница $\Gamma = \overline{\mathbb{C}} \backslash (B_1^0 \bigcup B_2^0)$ областей $B_1^0$ и $B_2^0$ состоит из конечного числа аналитических кривых, которые являются траекториями обоих квадратичных дифференциалов (4.1.15) и (4.1.16) с концами в особых точках (нулях и полюсах) дифференциалов (4.1.15) и (4.1.16), при этом нули этих дифференциалов, принадлежащие $\Gamma$, совпадают между собой. Отсюда и из определения траектории квадратичного дифференциала следует, что функция $\frac{P_2(w)}{P_1(w)}$ является голоморфной в области $B_1^0$, непрерывна на ее замыкании, не имеет нулей и принимает только вещественные значения на $\Gamma = \partial B_1^0$. Значит, по принципу максимума для гармонических функций, мнимая часть функции $\frac{P_2(w)}{P_1(w)}$ тождественно равна нулю в $B_1^0$, и поэтому $P_2 \equiv cP_1$, где $c$ — вещественный положительный множитель. Сравнивая разложения дифференциалов (4.1.15) и (4.1.16) вблизи точек $w = 1$ и $w = e^{2i\varphi}$, заключаем, что $c = 1$ и $P_1 \equiv P_2$. Таким образом, $B_1^0$ и $B_2^0$ являются круговыми областями квадратичного дифференциала (4.1.15), $\overline{B_1^0 \bigcup B_2^0} = \overline{\mathbb{C}}$. По теореме Дженкинса [104], отсюда следует, что каковы бы ни были непересекающиеся односвязные области $B_1 \ni 1$ и $B_2 \ni e^{2i\varphi}$ такие, что $\overline{\mathbb{C}} \backslash (B_1 \bigcup B_2) \supset \{0, \infty\}$, справедливо неравенство

$$r^{\alpha_1}(B_1, 1) \cdot r^{\alpha_2}(B_2, e^{2i\varphi}) \leqslant r^{\alpha_1}(B_1^0, 1) \cdot r^{\alpha_2}(B_2^0, e^{2i\varphi}),$$

знак равенства в котором реализуется в том и только в том случае, когда $B_1 = B_1^0$ и $B_2 = B_2^0$. Теперь, чтобы получить утверждение леммы 4.1.1, нужно рассмотреть квадратичный дифференциал

$$Q(t)dt^2 = \frac{4P_1(t^2)\,dt^2}{(t^2-1)^2(t^2-e^{2i\varphi})^2},$$

который при отображении $w = t^2$ переводится в квадратичный дифференциал (4.1.6). Тогда вблизи полюсов $t = \pm 1$ и $t = \pm e^{i\varphi}$, справедливы разложения

$$Q(t)dt^2 = \left[-\frac{\alpha_1}{(t \pm 1)^2} + \ldots\right] dt^2$$

и

$$Q(t)dt^2 = \left[-\frac{\alpha_2}{(t \pm e^{2i\varphi})^2} + \ldots\right] dt^2.$$

Отсюда при помощи вышеупомянутой теоремы Дженкинса [104] получаем все утверждения леммы 4.1.1.

**4.1.3. Доказательство теоремы об оценке инвариантного функционала с четырьмя свободными полюсами на окружности.** Пусть $\Delta$ — множество, состоящее из всех упорядоченных восьмерок $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4, a_1, a_2, a_3, a_4)$, где $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$ — попарно непересекающиеся (вообще говоря, многосвязные) области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ — точки на единичной окружности $\partial U$ такие, что $0 \leqslant \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$. Мы рассматриваем множество $\Delta(\varphi)$ ($\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$) как подмножество $\Delta$ посредством отождествления каждого элемента $(B_1, B_2, B_3, B_4) \in \Delta(\varphi)$ ($\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$) с элементом $(B_1, B_2, B_3, B_4, 1, e^{i\varphi}, -1, -e^{i\varphi}) \in \Delta$. Далее, на множестве $\Delta$ рассмотрим функционал $J$, действие которого на элемент $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4,\ a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Delta$ определяется равенством

$$J(\delta) := \left(\frac{r(B_1, a_1) \cdot r(B_3, a_3)}{\left|a_1 - a_3\right|^2}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{r(B_2, a_2) \cdot r(B_4, a_4)}{\left|a_2 - a_4\right|^2}\right)^{\alpha_2}.$$

По классической теореме М.А. Лаврентьева [158], каковы бы ни были точки $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ и непересекающиеся односвязные области $B_1, B_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ такие, что $a_1 \in B_1$ и $a_2 \in B_2$, справедливо неравенство $r(B_1, a_1) \cdot r(B_2, a_2) \leqslant \left|a_1 - a_2\right|^2$. Но предположение об односвязности областей $B_1$ и $B_2$ в этой теореме можно опустить. Отсюда следует, что $J_0 := \sup\limits_{\delta \in \Delta} J(\delta) \leqslant 1$. Пусть $\{\delta^n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов множества $\Delta$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} J(\delta^n) = J_0$. Для произвольного элемента $\delta = (B_1, B_2, B_3, B_4, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \Delta$ неевклидовы геодезические, соединяющие $a_1$ с $a_3$ и $a_2$ с $a_4$, пересекаются в единственной точке $b \in \mathbb{D}$. Тогда отображение $t = e^{i\theta}(w - b)(1 - \overline{b}w)^{-1}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, является автоморфизмом круга $\mathbb{D}$, $t(a_1) = t(-a_3)$, $t(a_2) = -t(-a_4)$, при этом параметр $\theta$ можно выбрать так, что $t(a_1) = 1$, а выполняя, в случае необходимости, циклическую перенумерацию точек $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ и областей $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, можно, очевидно, считать, что $t(a_2) = e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Далее, функционал $J$ инвариантен относительно дробно-линейных автоморфизмов расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, а с другой стороны, из леммы 4.1.1 и из теоремы В.Н. Дубинина [110] следует, что для любого $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ точная верхняя грань величины $(r(B_1, 1) \cdot r(B_3, -1))^{\alpha_1} \cdot (r(B_2, e^{i\varphi}) \cdot r(B_4, e^{-i\varphi}))^{\alpha_2}$ на множестве всех попарно непересекающихся (вообще говоря, многосвязных) областей $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $1 \in B_1$, $e^{i\varphi} \in B_2$, $-1 \in B_3$, $-e^{i\varphi} \in B_4$, конечна и достигается на некоторой четверке односвязных областей. Поэтому можно без ограничения общности полагать, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ элемент $\delta^n$ принадлежит при некотором $\varphi_n \in (0, \frac{\pi}{2}]$ множеству $\Delta(\varphi_n)$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно также считать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n =: \varphi_0$, и

$\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ (в противном случае должно быть $J_0 = 0$). Далее, так же, как и в доказательстве леммы 4.1.1, используя теорему Монтеля о нормальных семействах функций, можем показать, что существует элемент $\delta^0 = (B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0) \in \Delta(\varphi_0)$ такой, что $J(\delta_0) = J_0$. Для получения дополнительной информации об экстремальном элементе $\delta^0$ применим вариационную формулу Дюрена–Шиффера [278]

$$w^{\rho,w_0} = w^{\rho,w_0}(w) = w+\frac{A\rho^2}{w_0}\cdot\frac{w}{w-w_0}-\frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w_0}}\cdot\frac{w^2}{1-w\overline{w_0}}+O(\rho^3), \qquad \rho \to 0, \tag{4.1.17}$$

где $\rho$ — достаточно малый вещественный положительный параметр, $w_0 \in \mathbb{C}$, $A = A(\rho)$ — параметр граничной вариации, $\rho^{-3}|O(\rho^3)|$ — величина, равномерно ограниченная на каждом компактном подмножестве области $\mathbb{C}\backslash\{w_0, (\overline{w_0})^{-1}\}$. Кроме того, для всех $w_0 \in \mathbb{C}$, $w \in \partial U\backslash\{w_0\}$ и $\rho > 0$ выполняется условие $w^{\rho,w_0}(w) \in \partial U$. Далее, как и при доказательстве леммы 4.1.1, обозначим через $f_k^0(z)$ функцию, реализующую конформное и однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на область $B_k^0$ с $f_k^0(0) = a_k^0$, $k = \overline{1,4}$. Рассмотрим варьированные функции $f_k^{\rho,w_0}(z) := w^{\rho,w_0}(f_k^0(z))$, и пусть $B_k^\rho = f_k^{\rho,w_0}(\mathbb{D})$, $a_k^\rho = f_k^{\rho,w_0}(0)$, $k = \overline{1,4}$. Здесь $w_0 \in \mathbb{C}\backslash\left(\bigcup_{k=1}^4 B_k^0\right)$. Из равенства (4.1.17) получаем, что

$$(f_k^\rho)'(0) = (f_k^0)'(0)\left\{1-\frac{A\rho^2}{(a_k^0-w_0)^2}-\frac{\overline{A}\rho^2}{\overline{w_0}}\cdot\frac{2\overline{a_k^0}-\overline{w_0}}{\left(\overline{a_k^0}-\overline{w_0}\right)^2}+O(\rho^3)\right\}$$

при $\rho \to 0$. Но поскольку для односвязных областей гиперболического типа внутренний радиус совпадает с конформным, и при всех $c \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

$$\left|1-c\rho^2\right| = 1-\rho^2\mathrm{Re}\,c+o(\rho^3), \qquad \rho \in \mathbb{R}, \quad \rho \to 0+, \tag{4.1.18}$$

то отсюда следует, что

$$r\left(B_k^\rho, a_k^\rho\right) = r\left(B_k^0, a_k^0\right)\left\{1-\rho^2\mathrm{Re}\,\frac{2Aa_k^0}{w_0(a_k^0-w_0)^2}+O(\rho^3)\right\}, \qquad \rho \to 0. \tag{4.1.19}$$

Пользуясь тем, что $a_1^0$, $a_2^0$, $a_3^0$, $a_4^0 \in \mathbb{T}$ и $a_1^0 + a_3^0 = a_2^0 + a_4^0 = 0$, из (4.1.17) и (4.1.18) легко заключить, что при $\rho \to 0$ имеют место равенства

$$\left|a_1^\rho - a_3^\rho\right| = \left|a_1^0 - a_3^0\right|(1 + O(\rho^3)), \qquad \left|a_2^\rho - a_4^\rho\right| = \left|a_2^0 - a_4^0\right|(1 + O(\rho^3)).$$

Вместе с (4.1.19) это дает следующее равенство для значения функционала $J$ на элементе $\delta^\rho = (B_1^\rho, B_2^\rho, B_3^\rho, B_4^\rho, a_1^\rho, a_2^\rho, a_3^\rho, a_4^\rho)$, принадлежность которого к множеству $\Delta$ при малых значениях параметра $\rho$ непосредственно вытекает из свойств вариации Дюрена–Шиффера (4.1.17):

$$J(\delta^\rho) = J(\delta^0)\left\{1 - 2\rho^2 \times\right.$$
$$\times \mathrm{Re}\left(\frac{A}{w_0}\left[\frac{\alpha_1 a_1^0}{\left(a_1^0 - w_0\right)^2} + \frac{\alpha_2 a_2^0}{\left(a_2^0 - w_0\right)^2} + \frac{\alpha_1 a_3^0}{\left(a_3^0 - w_0\right)^2} + \frac{\alpha_2 a_4^0}{\left(a_4^0 - w_0\right)^2}\right]\right) +$$
$$\left. + O\left(\rho^3\right)\right\}, \qquad \rho \to 0.$$

Пользуясь тем, что элемент $\delta^0$ реализует максимум функционала $J$ на множестве $\Delta$, отсюда получаем, что при любых допустимых значениях $w_0$ и параметра $A(\rho)$ справедливо неравенство

$$2\mathrm{Re}\left(\frac{A(\rho)}{w_0}\left[\frac{\alpha_1 a_1^0}{(a_1^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_2 a_2^0}{(a_2^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_1 a_3^0}{(a_3^0 - w_0)^2} + \frac{\alpha_2 a_4^0}{(a_4^0 - w_0)^2}\right]\right) +$$
$$+ O(\rho) \geqslant 0,$$

из которого по основной лемме метода граничной вариации Шиффера (см. [339]) вытекает, что множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{4} B_k^0$ является замыканием объединения конечного числа траекторий квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 =$$
$$= -2\left[\frac{\alpha_1 a_1^0}{(a_1^0 - w)^2} + \frac{\alpha_2 a_2^0}{(a_2^0 - w)^2} + \frac{\alpha_1 a_3^0}{(a_3^0 - w)^2} + \frac{\alpha_2 a_4^0}{(a_4^0 - w)^2}\right]\frac{dw^2}{w} = \tag{4.1.20}$$
$$= -8e^{2i\varphi_0}\frac{\left(\alpha_2 + e^{-2i\varphi_0}\alpha_1\right)w^4 - 2(\alpha_2 + \alpha_1)w^2 + \left(\alpha_2 + e^{2i\varphi_0}\alpha_1\right)}{(w^2 - 1)^2\left(w^2 - e^{2i\varphi_0}\right)^2}\,dw^2.$$

Уже отсюда вытекает, что для этого дифференциала справедливо равенство $Q(-w)d(-w)^2 = Q(w)dw^2$, а структура его траекторий обладает симметрией относительно окружности $\partial U$ и центральной симметрией относительно начала координат $O$.

Теперь доказательство первого утверждения теоремы 4.1.1 завершается аналогично тому, как это было сделано в работе [28]. Для этого проводим следующую круговую симметризацию экстремальных областей $B_1^0$, $B_2^0$, $B_3^0$, $B_4^0$ с центром в начале координат $O$: при каждом $k = 1, 2, 3, 4$ область $B_k^0$ симметризуется относительно луча $\{z = te^{(k-1)\frac{\pi}{2}} : t > 0\}$; полученную таким образом область обозначим через $B_k^*$. Положим $a_1^* = 1$, $a_2^* = i$, $a_3^* = -1$, $a_4^* = -i$. После этого, пользуясь известными свойствами круговой симметризации, приведенными в первой части работы, заключаем, что при каждом $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ область $B_k^*$ односвязна и справедливо неравенство $r(B_k^0, a_k^0) \leqslant r(B_k^*, a_k^*)$, откуда получаем, что для элемента $\delta^* = (B_1^*, B_2^*, B_3^*, B_4^*, a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*) \in \Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ выполнена цепочка соотношений $J_0 = J(\delta^0) \leqslant J(\delta^*) \leqslant J(\delta^1) \leqslant J_0$, где элемент $\delta^1 = (B_1^1, B_2^1, B_3^1, B_4^1, a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1) \in \Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ выбран таким образом, что на нем достигается максимум функционала $J$ на множестве $\Delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, имеют место равенства $J(\delta^0) = J(\delta^*) = J(\delta^1) = J_0$, первое из которых влечет, что $r(B_k^0, a_k^0) = r(B_k^*, a_k^*)$, $k = \overline{1, 4}$, а второе — в силу утверждения первого пункта леммы 4.1.1 о единственности экстремали — дает совпадение экстремалей $\delta^*$ и $\delta^1$. Отсюда и из приведенного в первой части настоящей работы результата Дж. Дженкинса о единственности при круговой симметризации односвязных областей, а также с учетом структуры траекторий квадратичного дифференциала (4.1.20) вытекает что при каждом $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ справедливы равенства $B_k^0 = B_k^*$ и $a_k^0 = a_k^*$. Это означает, что $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, квадратичный дифференциал (4.1.20) принимает вид (4.1.1), точки $a_1^0$, $a_2^0$, $a_3^0$, $a_4^0$ и области $B_1^0$, $B_2^0$, $B_3^0$, $B_4^0$ являются соответственно его полюсами и круговыми областями, и для любых точек $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4 \in \mathbb{T}$ и для каждой четверки попарно непересекающиеся между собой областей $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $0 \leqslant \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, 4}$, справедливо неравенство (4.1.2). Первое утверждение теоремы 4.1.1 доказано.

Для завершения доказательства теоремы 4.1.1 осталось изучить случай равенства в (4.1.2). Пусть $\delta^1 = (B_1, B_2, B_3, B_4, a_1, a_2, a_3, a_4)$ — элемент множества $\Delta$, на котором достигается максимум $J_0$ функционала $J$, и пусть $\{\widetilde{B}_k\}_{k=1}^4$ — система областей, полученная в результате заполнения системы $\{B_k\}_{k=1}^4$, $\widetilde{\delta} = (\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3, \widetilde{B}_4, a_1, a_2, a_3, a_4)$. Тогда $J(\delta) = J(\widetilde{\delta}) = J_0$, откуда следуют равенства $r(B_k, a_k) = r(\widetilde{B}_k, a_k)$, $k = \overline{1,4}$. Пусть $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда при $w \to a_k^1$ имеют место равенства $g_{\widetilde{B}_k}(w, a_k) = -\log|w - a_k| + \log r(\widetilde{B}_k, a_k) + o(1)$ и $g_{B_k}(w, a_k) = -\log|w - a_k| + \log r(B_k, a_k) + o(1)$, что свидетельствует о том, что:

1) функция $h_k(w) := g_{\widetilde{B}_k}(w, a_k) - g_{B_k}(w, a_k)$ — гармонична в области $B_k$;

2) в каждой регулярной точке $z \in \partial B_k$ существует неотрицательный предел $\lim\limits_{w \to z, w \in B_k} h(w)$;

3) $h(a_k) = 0$.

Поскольку каждая точка границы области $B_k$, исключая, возможно, множество нулевой емкости, является регулярной, то из обобщенного принципа максимума для гармонических функций вытекает, что $h_k(w) \equiv 0$ в области $B_k$. Если предположить, что емкость (борелевского) множества $E_k := \widetilde{B}_k \backslash B_k$ — положительна, то в каждой точке $z \in E_k$, за исключением, быть может, некоторого множества $E_k^0$ нулевой емкости, существует и равен нулю предел $\lim\limits_{w \to z, w \in B_k} g_{B_k}(w, a_k)$, но в то же время $g_{\widetilde{B}_k}(z, a_k) > 0$ — ввиду положительности функции Грина во внутренних точках области. Значит, неравенство $\lim\limits_{w \to z, w \in B_k} h(w) > 0$ справедливо для всех точек $z \in E_k \backslash E_k^0$, и в силу обобщенного принципа максимума для гармонических функций отсюда вытекает положительность функции $h_k$ в области $B_k$.

Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{cap} E_k = 0$. В дальнейшем, пользуясь конформной инвариантностью функционала $J$ и, если нужно, применяя точно так же, как и выше, подходящее дробно-линейное преобразование, мы будем считать, что при некотором $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ справедливы равенства $a_1 = 1$, $a_2 = e^{i\varphi}$, $a_3 = -1$, $a_4 = -e^{i\varphi}$.

Проведенные выше рассуждения с использованием леммы 4.1.1, теоремы В.Н. Дубинина [110] и теоремы Дж. Дженкинса о единственности при круговой симметризации показывают, что $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, у нас есть две экстремали: $\widetilde{\delta} = (\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3, \widetilde{B}_4, 1, i, -1, -i)$ и $\delta_0 = (B_1^0, B_2^0, B_3^0, B_4^0, 1, i, -1, -i)$, где $B_1^0$, $B_2^0$, $B_3^0$, $B_4^0$ — круговые области квадратичного дифференциала $Q(w)dw^2$, определяемые равенством (4.1.1) ($a_k = i^{k-1} \in B_k^0$, $k = \overline{1,4}$).

По теореме В.Н. Дубинина [107] отсюда следует, что для каждого $k \in \{1,2,3,4\}$ существуют такие действительные числа $s_k$ и $q_k$, что функция Грина области $\widetilde{B}_k$ с полюсом в точке $i^{k-1}$ может быть представлена в виде

$$g_{\widetilde{B}_k}(w, i^{k-1}) = s_k \mathrm{Im}\,\zeta_k + q_k, \qquad (4.1.21)$$

где $\zeta_k = \zeta_k(w)$ — выбранная надлежащим образом однозначная ветвь функции $\int\limits_0^w Q^{\frac{1}{2}}(w)dw$.

Предположим, что $\widetilde{\delta} \neq \delta^0$. Из того, что замыкание объединения областей $B_1^0$, $B_2^0$, $B_3^0$ и $B_4^0$ совпадает с расширенной комплексной плоскостью и из структурных теорем для квадратичных дифференциалов (см., например, [104]) следует, что найдется траектория $\gamma$ квадратичного дифференциала (4.1.1) и номер $k \in \{1,2,3,4\}$ такие, что:

1) $\gamma$ не имеет общих точек ни с одной из областей $B_1^0$, $B_2^0$, $B_3^0$ и $B_4^0$;

2) множество $\gamma \bigcap \widetilde{B}_k$ — не пусто.

Не уменьшая общности, будем для определенности считать, что $k = 1$. Тогда равенство (4.1.21) показывает, что функция $g_{\widetilde{B}_1}(w,1)$ постоянна на множестве $\gamma \bigcap \widetilde{B}_1$. Из определения области $\widetilde{B}_1$ вытекает, что каждая ее граничная точка является регулярной. Поэтому, если множество $\gamma \bigcap \widetilde{B}_1$ имеет предельные точки на $\partial\widetilde{B}_1$, то $g_{\widetilde{B}_1}(w,1) \equiv 0$ на $\gamma \bigcap \widetilde{B}_1$, что противоречит положительности функции $g_{\widetilde{B}_1}(w,1)$ внутри области $\widetilde{B}_1$.

Тогда, снова используя структурные теоремы для квадратичных дифференциалов, делаем заключение, что имеет место один из следующих двух случаев: либо $\widetilde{B}_k = B_k^0$, $k = \overline{1,4}$, либо найдется такой номер $k \in \{1,2,3,4\}$, что все нули квадратичного дифференциала (4.1.1) принадлежат области $\widetilde{B}_k$. Предположим, что выполняется второй из них. Тогда, учитывая вид квадратичного дифференциала (4.1.1) приходим к выводу, что в случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$ он имеет четыре простых нуля в области $\widetilde{B}_k$, которые являются точками ветвления первого порядка для функции $\int\limits_0^w Q^{\frac{1}{2}}(w)dw$ (в этом легко убедится при помощи разложения этой функции в ряд Пюизо с центром в нулях квадратичного дифференциала (4.1.1)), что противоречит возможности выделения ее однозначной ветви в области $\widetilde{B}_k$.

Если же $\alpha_1 = \alpha_2$, то дифференциал (4.1.1) имеет два нуля второго порядка в точках $w = 0$ и $w = \infty$. В этом случае дословным повторением рассуждений работы [108] устанавливается нарушение принципа максимума для гармонических функций. Таким образом, показано, что если для попарно непересекающихся областей $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4 \in \partial U$ таких, что $0 \leqslant \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,4}$, имеет место случай равенства в (4.1.2), то выполнены равенства $\operatorname{cap} \widetilde{B_k} \backslash B_k = 0$, $k = \overline{1,4}$, и существует такое дробно-линейное отображение $S$, являющееся автоморфизмом единичного круга $\mathbb{D}$, что при $k = \overline{1,4}$ $a_k = S(a_k^0)$ и $\widetilde{B}_k = S(B_k^0)$, где $a_k^0$ и $B_k^0$ являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (4.1.1).

Из проведенного выше анализа следует и обратное: если для попарно непересекающихся областей $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4 \subset \overline{\mathbb{C}}$ и точек $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4 \in \partial U$ таких, что $0 \leqslant \arg a_1 < \arg a_2 < \arg a_3 < \arg a_4 < 2\pi$ и $a_k \in B_k$, справедливы равенства $\operatorname{cap} \widetilde{B_k} \backslash B_k = 0$ и существует такое дробно-линейное отображение $S$, являющееся автоморфизмом единичного круга $\mathbb{D}$, что $a_k = S(a_k^0)$ и $\widetilde{B}_k = S(B_k^0)$, $k = \overline{1,4}$, то в (4.1.1) имеет место случай равенства. Теорема 4.1.1 доказана.

**4.1.4. Доказательство теоремы об оценке функционала первого типа для $2n$-лучевых систем точек на окружности.** Пусть $n$ — натуральное число, $n \geq 3$, $a_1, \ldots, a_{2n}$ — точки на единичной окружности $\partial U$, $a_{2n+1} := a_1$, $0 \leqslant \arg a_1 < \cdots < \arg a_{2n} < 2\pi$, $B_1, \ldots, B_{2n}$ — попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$ такие, что $a_{2k-1} \in B_{2k-1}$ и $a_{2k} \in B_{2k} \subset L(a_{2k-1}, a_{2k+1}) := \{z \in \mathbb{C} : \arg a_{2k-1} < \arg z < \arg a_{2k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$. Положим $\sigma_k := \frac{1}{\pi}(\arg a_{2k+1} - \arg a_{2k-1})$, $k = \overline{1,n}$, $\sigma_{n+1} := \sigma_1$. Очевидно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k = 2$. Пусть $\zeta_k(w)$ — однозначная ветвь функции $\left(e^{-i\arg a_{2k-1}} w\right)^{\frac{1}{\sigma_k}}$, выделяемая условием $\zeta_k(a_{2k-1}) = -i$.

Наши дальнейшие рассуждения основаны на применении кусочно-разделяющего преобразования, предложенного в работах [108–110]. Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ функция $\zeta_k$ отображает угол $L(a_{2k-1}, a_{2k+1})$ на полуплоскость $\operatorname{Im} \zeta > 0$.

Определим области $G_k^l$, $l=\overline{1,4}$, $k=\overline{1,n}$, следующим образом. Область $G_k^1$ является образом области $B_{2k}$ при отображении $\zeta_k$; $G_k^3$ — область, симметричная области $G_k^1$ относительно мнимой оси. $G_k^2$ являются объединением связной компоненты множества $B_{2k+1}\bigcap\overline{L}(a_{2k-1},a_{2k+1})$ при отображении $\zeta_k$ с его симметричным отражением относительно мнимой оси. Аналогично строится область $G_k^4$.

Пусть $c_k^1=\zeta_k(a_{2k})$, $c_k^3$ – образ точки $c_k^1$ при отражении относительно мнимой оси, $c_k^2=i$, $c_k^4=-i$, $k=\overline{1,n}$. Из определения областей $G_k^1$, $G_k^2$, $G_k^3$ и $G_k^4$ и точек $c_k^1$ $c_k^2$, $c_k^3$ и $c_k^4$ вытекает, что для всех $k=1,\ldots,n$ эти области попарно не пересекаются и $c_k^l\in G_k^l$, $l=\overline{1,4}$. Применяя следствие 4.1.2, для всех $k=1,\ldots,n$ получаем неравенство

$$\left(r(G_k^1,c_k^1)\cdot r(G_k^3,c_k^3)\right)^{\alpha_1}\cdot\left(r(G_k^2,c_k^2)\cdot r(G_k^4,c_k^4)\right)^{\alpha_2}\leqslant 4^{\alpha_1+\alpha_2}M_0(\alpha_1,\alpha_2). \tag{4.1.22}$$

Далее, учитывая вид отображения $\zeta_k$ будем иметь следующие асимптотические равенства:

$$\left|\zeta_k(w)-\zeta_k(a_{2k-1})\right|=\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)\left|w-a_{2k-1}\right|(1+o(1))$$

при $w\to a_{2k-1}$;

$$\left|\zeta_k(w)-\zeta_k(a_{2k+1})\right|=\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)\left|w-a_{2k+1}\right|(1+o(1))$$

при $w\to a_{2k+1}$. Из этих равенств, применяя теорему В.Н. Дубинина [108], получаем неравенства

$$r(B_{2k-1},a_{2k-1})\leqslant\left[\sigma_k\cdot\sigma_{k-1}\cdot r(G_k^4,c_k^4)\cdot r(G_{k-1}^2,c_{k-1}^2)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=1,\ldots,n, \tag{4.1.23}$$

где $G_0^2:=G_n^2$, $c_0^2:=c_n^2=i$. С другой стороны, из определения внутреннего радиуса вытекают равенства

$$r(G_k^1,c_k^1)=\left|\zeta_k'(a_{2k})\right|r(B_{2k},a_{2k})=\frac{1}{\sigma_k}\,r(B_{2k},a_{2k}),\qquad k=1,\ldots,n.$$

Поскольку $r(G_k^1,c_k^1)=r(G_k^3,c_k^3)$ для всех $k=1,\ldots,n$, то имеют место соотношения:

$$r(B_{2k},a_{2k})=\sigma_k\left[r(G_k^1,c_k^1)\cdot r(G_k^3,c_k^3)\right]^{\frac{1}{2}},\qquad k=1,\ldots,n. \tag{4.1.24}$$

Используя (4.1.22) – (4.1.24) и неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем цепочку соотношений

$$\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k-1},a_{2k-1})\right)^{\alpha_1}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k},a_{2k})\right)^{\alpha_2}\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\left(r(G_k^1,c_k^1)\cdot r(G_k^3,c_k^3)\right)^{\alpha_1}\left(r(G_k^2,c_k^2)\cdot r(G_k^4,c_k^4)\right)^{\alpha_2}\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)^{\alpha_1+\alpha_2}\cdot\left(4^{\alpha_1+\alpha_2}I_4^0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{\frac{n}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\right)^{n(\alpha_1+\alpha_2)}\cdot\left(2^{\alpha_1+\alpha_2}I_4^0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{2}{n}\right)^{n(\alpha_1+\alpha_2)}\times$$

$$\times\left(4^{\alpha_1+\alpha_2}I_4^0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{4}{n}\right)^{n(\alpha_1+\alpha_2)}\left(I_4^0(\alpha_1,\alpha_2)\right)^{\frac{n}{2}},$$

в которой все неравенства превращаются в равенства тогда и только тогда, когда для каждого $k\in\{1,\dots,n\}$ выполняются следующие условия:

1) области $\widetilde{G}_k^1$, $\widetilde{G}_k^2$, $\widetilde{G}_k^3$, $\widetilde{G}_k^4$ и точки $c_k^1$, $c_k^2$, $c_k^3$, $c_k^4$ являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала (4.1.1);

2) $\operatorname{cap}\widetilde{G}_k^1\backslash G_k^1=\operatorname{cap}\widetilde{G}_k^2\backslash G_k^2=\operatorname{cap}\widetilde{G}_k^3\backslash G_k^3=\operatorname{cap}\widetilde{G}_k^4\backslash G_k^4=0$;

3) $\sigma_k=\frac{2}{n}$.

Выполняя, если необходимо, поворот плоскости $\mathbb{C}$ относительно начала координат $O$, можно без уменьшения общности считать, что $a_1=1$. В силу определения областей $G_k^1$, $G_k^2$, $G_k^3$, $G_k^4$ и точек $c_k^1$, $c_k^2$, $c_k^3$, $c_k^4$, выполнение условий а) и в) означает, что $a_k=\exp\left[i(k-1)\frac{\pi}{n}\right]$, $k=\overline{1,2n}$, и $\zeta_k(w)=(-1)^{k-1}(\sqrt{w}_+)^n$, $k=\overline{1,n}$, где $\sqrt{w}_+$ — однозначная ветвь функции $\sqrt{w}$, выделяемая условием $\sqrt{1}_+=1$, а выполнение условий 2) и 3) — что $\operatorname{cap}\widetilde{B}_k\backslash B_k=0$, $k=\overline{1,2n}$. Далее, осуществляя в квадратичном дифференциале (4.1.1) последовательно замены локальных параметров $w=\zeta$ и $\zeta=w^{\frac{n}{2}}$, мы получаем квадратичный дифференциал (4.1.7), при этом точки $a_k$ и области $\widetilde{B}_k$ являются соответственно его полюсами и круговыми областями ($k = \overline{1, 2n}$). Это завершает доказательство теоремы 4.1.2.

Следующий вспомогательный результат был получен А.Л. Таргонским в [221].

**Лемма 4.1.2**. *Справедливы соотношения*

$$r\left(B_0^{(0)}, 0\right) = \rho \frac{\sqrt{\alpha_1}\left|\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}-1\right)}}{\left|\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}+1\right)}},$$

$$r\left(B_\infty^{(0)}, \infty\right) = \frac{1}{\rho} \frac{\sqrt{\alpha_1}\left|\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}-1\right)}}{\left(\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}+1\right)}},$$

$$r\left(B_k^{(0)}, (-1)^{k-1} i\rho\right) = 2\rho \frac{\sqrt{\alpha_1}\left|\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1}\right|^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}-1\right)}}{\left(\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}+1\right)}}, \quad k = 1, 2,$$

$$I_4^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2) = \left(r\left(B_0^{(0)}, 0\right) r\left(B_\infty^{(0)}, \infty\right)\right)^{\alpha_1} \times$$

$$\times \left(\frac{r\left(B_1^{(0)}, i\rho\right) r\left(B_2^{(0)}, -i\rho\right)}{4\rho^2}\right)^{\alpha_2} =$$

$$= \alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\left|\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2}\right|^{-(\sqrt{\alpha_1}-\sqrt{\alpha_2})^2}\left|\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}\right|^{-(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^2},$$

$B_q^{(0)}$, $q \in \{0, 1, 2, \infty\}$ *— круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q_1(w)dw^2 = -\frac{w^4 + 2(1 - 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1})\rho^2 w^2 + \rho^4}{w^2(w^2 + \rho^2)^2} dw^2.$$

Величину $I_4^{(0)}(\alpha, 1)$, по-видимому, впервые вычислил В.Н. Дубинин [108], затем — Г.В. Кузьмина [153] и Е.Г. Емельянов [119].

## 4.2 Оценки функционалов первого типа со свободными полюсами на окружности для открытых множеств и неналегающих областей

**4.2.1. Основные утверждения.** Пусть $D_4$ есть объединение всех круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q_1(w)dw^2 = -\frac{\left((1+\sqrt{\alpha})w^2+1-\sqrt{\alpha}\right)\left((1-\sqrt{\alpha})w^2+1+\sqrt{\alpha}\right)}{(w^4-1)^2}\,dw^2,$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \leqslant 1$.

**Теорема 4.2.1**. *Пусть* $a_k = \exp i\frac{\pi(k-1)}{2}$, $k = \overline{1,4}$. *Тогда для всякого* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \leqslant 1$ *и любого открытого множества* $B$, *удовлетворяющего условиям:*

*1.* $\{a_k\}_{k=1}^4 \subset B \subset \overline{\mathbb{C}}$,

*2.* $[B(a_1)\bigcap B(a_p)]\bigcup[B(a_3)\bigcap B(a_q)] = \varnothing$, *для всех* $p = 2,3,4$, $q = 1,2,4$*; справедливо неравенство*

$$r(B,a_1)r(B,a_3)\cdot\left[r(B,a_2)r(B,a_4)\exp 2\,g_B(a_2,a_4)\right]^\alpha \leqslant$$

$$\leqslant r(D_4,a_1)r(D_4,a_3)\cdot\left[r(D_4,a_2)r(D_4,a_4)\right]^\alpha, \tag{4.2.1}$$

*где знак равества достигается тогда и только тогда, когда* $\widetilde{B} = D_4$ *и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}\backslash B = 0$.

Теорема 4.2.1 является усилением одного весьма важного результата из [153]. Здесь $\widetilde{B}$ определено следующим образом:

$$\widetilde{B} = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=1}^{4} \widetilde{B}(a_k), & B(a_2)\bigcap B(a_4) = \varnothing, \\ \bigcup\limits_{k=1}^{3} \widetilde{B}(a_k), & B(a_2) = B(a_4), \end{cases}$$

где $\left\{\widetilde{B}(a_k)\right\}_{k=1}^4$ — система неналегающих областей, полученная в результате выполнения операции заполнения несущественных граничных компонент (см. главу 2) системы неналегающих областей $\{B(a_k)\}_{k=1}^4$ относительно системы точек $\{a_k\}_{k=1}^4$ в случае, когда $B(a_2)\bigcap B(a_4) = \varnothing$. Если же $B(a_2) = B(a_4)$, то $\left\{\widetilde{B}(a_k)\right\}_{k=1}^3$ — система неналегающих областей, полученная в результате выполнения операции заполнения системы $\{B(a_k)\}_{k=1}^3$ относительно системы точек $\{a_k\}_{k=1}^3$.

**Следствие 4.2.1.** *При условиях теоремы 4.2.1 справедливо неравенство*

$$r(B,a_1)r(B,a_3)\cdot[r(B,a_2)r(B,a_4)]^{\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant r(D_4,a_1)r(D_4,a_3)\cdot[r(D_4,a_2)r(D_4,a_4)]^{\alpha}.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $\widetilde{B}=D_4$ *и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}\backslash B=0$.

**Следствие 4.2.2.** *Пусть* $\alpha\geqslant\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{+}$. *Тогда при условиях теоремы 4.2.1 выполняется неравенство*

$$[r(B,a_1)r(B,a_3)]^{\alpha}\cdot[r(B,a_2)r(B,a_4)]^{\beta}\leqslant$$
$$\leqslant[r(D_4,a_1)r(D_4,a_3)]^{\alpha}\cdot[r(D_4,a_2)r(D_4,a_4)]^{\beta}.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $\widetilde{B}=D_4$ *и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}\backslash B=0$.

Используя теорему 4.2.1, следствие 4.2.2 и разделяющее преобразование ( [108–110]) получаем следующий результат.

**Теорема 4.2.2**. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant3$, $\alpha\in(0,1)$. *Для любой* $2n$*-лучевой системы точек* $A_{2n}=\{a_k\}_{k=1}^{2n}$, *расположенной на* $\partial U$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=1}^{2n}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{1,2n}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}r(B_{2k-1},a_{2k-1})r^{\alpha}(B_{2k},a_{2k})\leqslant$$
$$\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\{a_{2p-1}\}_{p=1}^{n}\right)\right]^{1+\alpha}[r(D_4,1)r(D_4,-1)\cdot[r(D_4,i)r(D_4,-i)]^{\alpha}]^{\frac{n}{2}}.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $a_k$ *и* $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{1,2n}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=w^{n-2}\frac{(\alpha-1)w^{2n}-2(1+\alpha)w^{n}+(\alpha-1)}{(w^{2n}-1)^2}dw^2. \qquad (4.2.2)$$

.

Теорема 4.2.2 усиливает и обобщает теорему 2.3.11.

Полюсы и круговые области дифференциала (4.2.2) обозначим $a_k^0$, $B_k^0$, $k=\overline{1,2n}$.

**Следствие 4.2.3.** *При условиях теоремы 4.2.2 выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k-1},a_{2k-1})r^{\alpha}(B_{2k},a_{2k}) \leqslant \prod_{k=1}^{n} r(B_{2k-1}^0,a_{2k-1}^0)r^{\alpha}(B_{2k}^0,a_{2k}^0).$$

*Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда* $a_k$ *и* $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{1,2n}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2}\frac{(\alpha-1)w^{2n}-2(1+\alpha)w^n+(\alpha-1)}{(w^{2n}-1)^2}\,dw^2.$$

Следствие 4.2.3 обобщает теорему 2.3.11.

**4.2.2. Доказательство теоремы об оценке функционала первого типа с четырьмя фиксированными полюсами на окружности.** Из условия 2 теоремы 4.2.1 получаем, что область $B$ обладает обобщенной функцией Грина $g_B(w,a)$. Дальнейшие рассуждения проводятся в соответствии с результатами и методами работ [108–112]). Рассмотрим множества $E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash B$, $E(a_k,t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-a_k|\leqslant t\}$, $k=\overline{1,4}$, $t\in\mathbb{R}^+$. Для достаточно малых $t\in\mathbb{R}^+$ построим обобщенный конденсатор

$$C\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^4\right)=\{E_0,E(a_1,t),E(a_2,t),E(a_3,t),E(a_4,t)\}$$

с предписанными значениями $(0,1,\sqrt{\alpha},1,\sqrt{\alpha})$. Емкостью конденсатора $C\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^4\right)$ называется величина

$$\operatorname{cap} C\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^4\right)=\inf\iint\left[(G_x)^2+(G_y)^2\right]dxdy,$$

где нижняя грань берется по всем вещественным, непрерывным и липшицевым на $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $G=G(z)$ таким, что $G(z)=0$ в некоторой окрестности множества $E_0$, $G(z)=1$ на множествах $E(a_1,t)$ и

$E(a_3,t)$, и наконец, $G(z)=\sqrt{\alpha}$ на $E(a_2,t)\bigcup E(a_4,t)$. Модуль конденсатора $\left|C\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^{4}\right)\right|$ определяется равенством

$$\left|C\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^{4}\right)\right|=\left[\operatorname{cap}C\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^{4}\right)\right]^{-1}.$$

Рассмотрим области $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{4}$, где

$$\Lambda_1=\{w\in\mathbb{C}:\ |w|>1,\ \mathrm{Im}w>0\},$$

$$\Lambda_2=\{w\in\mathbb{C}:\ |w|>1,\ \mathrm{Im}w<0\},$$

$$\Lambda_3=\{w\in\mathbb{C}:\ |w|<1,\ \mathrm{Im}w>0\},$$

$$\Lambda_4=\{w\in\mathbb{C}:\ |w|<1,\ \mathrm{Im}w<0\}.$$

Обозначим $E_k(t):=E(a_k,t)$. Рассмотрим конденсаторы

$$C_1\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^{4}\right):=C_1(t):=\left(E_0^{(1)},E_1^{(1)}(t),E_2^{(1)}(t),E_3^{(1)}(t)\right),$$

$$C_2\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^{4}\right):=C_2(t):=\left(E_0^{(2)},E_1^{(2)}(t),E_3^{(2)}(t),E_4^{(2)}(t)\right),$$

$$C_3\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^{4}\right):=C_3(t):=\left(E_0^{(3)},E_1^{(3)}(t),E_2^{(3)}(t),E_3^{(3)}(t)\right),$$

$$C_4\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^{4}\right):=C_4(t):=\left(E_0^{(4)},E_1^{(4)}(t),E_3^{(4)}(t),E_4^{(4)}(t)\right),$$

где

$$E_0^{(k)}=\chi\left(E_0\bigcap\Lambda_k\right)\bigcup\overline{\chi\left(E_0\bigcap\Lambda_k\right)},\quad k=\overline{1,4}.$$

$$E_s^{(k)}(t)=\chi\left(E_s(t)\bigcap\Lambda_k\right)\bigcup\overline{\chi\left(E_s(t)\bigcap\Lambda_k\right)},\quad k=\overline{1,4},\quad s=1,3.$$

$$E_2^{(k)}(t)=\chi\left(E_2(t)\bigcap\Lambda_k\right)\bigcup\overline{\chi\left(E_2(t)\bigcap\Lambda_k\right)},\quad k=1,3.$$

$$E_4^{(k)}(t)=\chi\left(E_4(t)\bigcap\Lambda_k\right)\bigcup\overline{\chi\left(E_4(t)\bigcap\Lambda_k\right)},\quad k=2,4.$$

Здесь $\chi(G)$ обозначает образ множества $G$ при отображении функцией Жуковского $\chi(w)=\frac{1}{2}(w+w^{-1})$, а $\overline{\chi(G)}$ — множество, симметричное $\chi(G)$ относительно вещественной оси. Каждому конденсатору $C_l\left(t,B,\{a_k\}_{k=1}^{4}\right)$ поставим в соответствие класс $V_{(\alpha)}^{(l)}$, $l=\overline{1,4}$, — всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $E_0^{(l)}$, $G(z) = 1$, $z \in E_s^{(l)}$, $s = 1, 3$. $G(z) = \sqrt{\alpha}$, $z \in E_s^{(l)}$, $s = 2, 4$, $l = \overline{1, 4}$. Очевидно, что

$$\operatorname{cap} C_l \left(t, B, \{a_k\}_{k=1}^4\right) = \inf_{V_{(\alpha)}^{(l)}} \iint \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right] dxdy.$$

Произведем разделяющее преобразование открытого множества $B$ относительно системы областей $\{\Lambda_k\}_{k=1}^4$ и функции $\chi(w)$. По-видимому, функция $\chi(w)$ впервые была использована в подобных задачах в работах [138, 139]. При разделяющем преобразовании в соответствии с работами [108–110, 138, 139] получаем неравенство при достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$

$$\operatorname{cap} C \left(t, B, \{a_k\}_{k=1}^4\right) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} \operatorname{cap} C_k \left(t, B, \{a_k\}_{k=1}^4\right).$$

Для модулей этих конденсаторов справедливо соотношение

$$|C \left(t, B, \{a_k\}_{k=1}^4\right)| \leqslant 2 \left( \sum_{l=1}^{4} |C_k \left(t, B, \{a_k\}_{k=1}^4\right)|^{-1} \right)^{-1}. \tag{4.2.3}$$

Для функции $\chi(z)$ выполняются асимптотические равенства

$$\left|\chi(w) - \chi(\pm 1)\right| \sim \frac{1}{2} |z - (\pm 1)|^2, \quad w \to \pm 1, \tag{4.2.4}$$

$$\left|\chi(w) - \chi(\pm i)\right| \sim |z - (\pm i)|, \quad w \to \pm i. \tag{4.2.5}$$

Далее, из теоремы 1 [111] получаем

$$|C \left(t, B, \{a_k\}_{k=1}^4\right)| = \frac{\varkappa}{2\pi} \log \frac{1}{t} + M(B, \{a_k\}_{k=1}^4) + o(1), \tag{4.2.6}$$

где

$$\varkappa = (2 + 2\alpha)^{-1} = [2(1 + \alpha)]^{-1},$$

$$M(B, \{a_k\}_{k=1}^4) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{[2(1+\alpha)]^2} \times$$

$$\times \left\{\log r(B, 1) r(B, -1) r^{\alpha}(B, i) r^{\alpha}(B, -i) + 2\alpha g_B(i, -i)\right\}.$$

С учетом формул (4.2.4), (4.2.5) и теоремы 1 [111], получаем аналогичные асимптотические представления для конденсаторов $C_k(t)$, $l=\overline{1,4}$,

$$C_k(t)=\frac{\varkappa_k}{2\pi}\log\frac{1}{t}+M_k+o(1),$$

где

$$\varkappa=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\alpha\right)^{-1}=(1+\alpha)^{-1},$$

$$M_k=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1+\alpha)^2}\cdot\log\left\{\left[\frac{r(B_k,1)}{\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{r(B_k,-1)}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot r^{\alpha}(B_k,0)\right\},$$

$$B_k=\chi\left(B\bigcap\Lambda_k\right)\bigcup\overline{\chi\left(B\bigcap\Lambda_k\right)},$$

$r(B_k,b)$ – внутренний радиус связной компоненты $B_k(b)$ в точке $b$.

Произведем некоторые вычисления

$$|C_k(t)|^{-1}=$$

$$=\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+\alpha}\log\frac{1}{t}\right]^{-1}\left[1-\frac{2\pi(1+\alpha)}{\log\frac{1}{t}}M_k+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right]=$$

$$=\frac{2\pi(1+\alpha)}{\log\frac{1}{t}}-\frac{[2\pi(1+\alpha)]^2}{(\log\frac{1}{t})^2}M_k+o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{4}|C_k(t)|^{-1}=$$

$$=\frac{8\pi(1+\alpha)}{\log\frac{1}{t}}-\frac{[2\pi(1+\alpha)]^2}{(\log\frac{1}{t})^2}\sum_{k=1}^{4}M_k+o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right)=$$

$$=\frac{8\pi(1+\alpha)}{\log\frac{1}{t}}\left[1-\frac{\pi(1+\alpha)}{2\log\frac{1}{t}}\sum_{k=1}^{4}M_k+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right],$$

$$\left(\sum_{k=1}^{4}|C_k(r)|^{-1}\right)^{-1}=$$

$$= \frac{\log\frac{1}{t}}{8\pi(1+\alpha)} + \frac{\log\frac{1}{t}}{8\pi(1+\alpha)} \cdot \frac{\frac{1}{2}\pi(1+\alpha)}{\log\frac{1}{t}} \sum_{k=1}^{4} M_k + o(1) =$$

$$= \frac{\log\frac{1}{t}}{8\pi(1+\alpha)} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2\pi(1+\alpha)^2} \times$$

$$\times \log \prod_{k=1}^{4} \left[\frac{r(B_k,1)r(B_k,-1)}{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{4}} r^{\alpha}(B_k,0) + o(1).$$

Отсюда, с учетом (4.2.3), следует неравенство

$$M(B,\{a_k\}_{k=1}^{4}) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2\pi(1+\alpha)^2} \log \prod_{k=1}^{4} \left[\frac{r(B_k,1)r(B_k,-1)}{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{4}} r^{\alpha}(B_k,0) + o(1).$$

Выполняя необходимые преобразования получаем неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(2(1+\alpha))^2} \times$$

$$\times \log\left\{r(B,1)r(B,-1)r^{\alpha}(B,i)r^{\alpha}(B,-i) + 2\alpha g_B(i,-i)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{16\pi(1+\alpha)^2} \log \prod_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} r^{\alpha}(B_k,0) r^{\frac{1}{4}}(B_k,1) r^{\frac{1}{4}}(B_k,-1).$$

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$r(B,1)r^{\alpha}(B,i)r(B,-1)r^{\alpha}(B,-i)\exp 2\alpha g_B(i,-i) \leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{\prod_{k=1}^{4} r^{4\alpha}(B_k,0)r(B_k,1)r(B_k,-1)\right\}^{\frac{1}{8}}.$$

В работе [109] показано, что выполняется оценка

$$r^{\gamma}(G_0,0)r(G_1,1)r(G_2,-1) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi(\gamma) = 2^{\gamma+6}\gamma^{\frac{1}{2}(\gamma+2)}(2-\sqrt{\gamma})^{-\frac{(2-\sqrt{\gamma})^2}{2}}(2+\sqrt{\gamma})^{-\frac{1}{2}(2+\sqrt{\gamma})^2}, \quad \gamma \in (0,4),$$

на классе всех троек произвольных, попарно непересекающихся областей $G_0$, $G_1$, $G_2$, $0 \in G_0$, $1 \in G_1$, $-1 \in G_2$. Таким образом при $\alpha \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$r(B,1)r^{\alpha}(B,i)r(B,-1)r^{\alpha}(B,-i)\exp 2\alpha g_B(i,-i) \leqslant 2\left[\Psi(4\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.2.7}$$

Причем, области $\widetilde{B}_k$ в случае равенства должны совпадать с круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2+\gamma}{w^2(1-w^2)^2}\,dw^2, \quad \gamma = 4\alpha,$$

и $\operatorname{cap}\widetilde{B}_k \backslash B_k = 0$, $k = \overline{1,4}$. Осуществляя замену переменной в этом квадратичном дифференциале по формуле

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

получаем следующий квадратичный дифференциал:

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(1-\alpha)w^4 + 2(1+\alpha)w^2 + (1-\alpha)}{(w^4-1)^2}\,dw^2.$$

Таким образом, мы получаем, что равенство в неравенстве теоремы 4.2.1 может осуществиться только тогда, когда $\widetilde{B} = D_4$.

**4.2.3. Доказательство теоремы 4.2.2.** Рассмотрим систему точек $A_n = \{a_{2k-1}\}_{k=1}^{n}$, $a_{2n+1} := a_1$, являющую подсистемой системы точек $A_{2n} = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, заданной в условиях теоремы. Для $n$-лучевой системы точек $A_n$ рассмотрим набор областей $\{P_k(A_n)\}_{\underline{k=1}}^{n}$, где $P_k(A_n) = \{w \in \mathbb{C} : \arg a_{2k-1} < \arg w < \arg a_{2k+1}\}$, $k = \overline{1,n}$, и семейство функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$, где $z_k = \left(e^{-i\arg a_{2k-1}}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $\alpha_k = \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}}$, $k = \overline{1,n}$. Здесь ветвь степенной функции $t = z^{\alpha}$, задается следующим образом: $t = r^{\alpha}e^{i\alpha\varphi}$ при $z = re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Таким образом, функция $z = z_k(w)$, $k = \overline{1,n}$, реализует однолистное и конформное отображение области $P_k(A_n)$ на верхнюю полуплоскость.

Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначает объединение связной компоненты множества $z_k\left(B_{2k-1}\bigcap\overline{P_k}(A_n)\right)$, содержащей точку $\omega_k^{(1)} = z_k(a_{2k-1})$, с ее симметричным отображением относительно вещественной оси.

В свою очередь, $\Omega_k^{(3)}$, $k=\overline{1,n}$, обозначает объединение связной компоненты множества $z_k\left(B_{2k+1}\bigcap\overline{P_k}(A_n)\right)$, содержащей точку $\omega_k^{(3)}=z_k(a_{2k+1})$, с ее симметричным отображением относительно вещественной оси.

Заметим, что $\Omega_k^{(1)}$ и $\Omega_k^{(3)}$ являются, вообще говоря, многосвязными, непересекающимися областями, $\omega_k^{(s)}\in\Omega_k^{(s)}$, $k=\overline{1,n}$, $s=1,3$. Далее пусть $\Omega_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, является объединением связной компоненты множества $z_k\left(B_{2k}\bigcap\overline{P_k}(A_n)\right)$, содержащей точку $\omega_k^{(2)}=z_k(a_{2k})$, с ее симметричным отображением относительно вещественной оси. Если $B_{2k}\bigcap\partial P_k\neq\varnothing$, то $\Omega_k^{(2)}$ — область (вообще говоря, многосвязная), содержащая точки $\omega_k^{(2)}$ и $\omega_k^{(4)}=\overline{\omega}_k^{(2)}$. Если же $B_{2k}\bigcap\partial P_k=\varnothing$, то открытое множество $\Omega_k^{(2)}$ состоит из двух непересекающихся областей $G_k^{(2)}=z_k\left(B_{2k}\bigcap P_k\right)$ и $G_k^{(4)}=z_k\left(B_{2k}\bigcap P_k\right)$, то есть $\Omega_k^{(2)}=G_k^{(2)}\bigcup G_k^{(4)}$ и $\omega_k^{(s)}\in\Omega_k^{(2)}$, $s=2,4$, и кроме того, $\left[\Omega_k^{(1)}\bigcap\Omega_k^{(2)}\right]\bigcup\left[\Omega_k^{(3)}\bigcap\Omega_k^{(2)}\right]=\varnothing$. При каждом $k=\overline{1,n}$ обозначим $\Delta_k=\Omega_k^{(1)}\bigcup\Omega_k^{(2)}\bigcup\Omega_k^{(3)}$. Очевидно, что $\omega_k^{(s)}\in\Delta_k$, $s=\overline{1,4}$.

Таким образом, при разделяющем преобразовании областей $B_k$, $k=\overline{1,2n}$, относительно набора областей $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$ и семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, получаем набор открытых множеств $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$. При достаточно малых $t\in\mathbb{R}^+$ построим конденсатор

$$C_t\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)=\left(E_0,E_1(t),E_2(t)\right),$$

где $E_0=\overline{\mathbb{C}}\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{2n}B_k$, $E_1(t)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E(a_{2k-1},t)$, $E_2(t)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E(a_{2k},t)$ с предписанными, соответственно, значениями $\{0,1,\sqrt{\alpha}\}$. Емкость этого конденсатора равна, по определению, величине

$$\operatorname{cap}C_t\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)=\inf\iint\left[(G_x)^2+(G_y)^2\right]dxdy,$$

где точная нижняя грань берется по классу всех вещественных, липшицевых на $\overline{\mathbb{C}}$ функций, равных нулю в некоторой окрестности множества $E_0$, и соответственно, 1 и $\sqrt{\alpha}$ — на множествах $E_1(t)$ и $E_2(t)$. Модуль конденсатора $\left|C_t\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)\right|$ и его емкость связаны соотношением

$$\left|C_t\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)\right|=\left[\operatorname{cap}C_t\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)\right]^{-1}. \qquad (4.2.8)$$

При каждом $k = \overline{1,n}$ образуем конденсаторы $C_t(\Delta_k) = \Big(E_0^{(k)}, E_1^{(k)}(t), E_2^{(k)}(t)\Big)$ где $E_0^{(k)} = \overline{\mathbb{C}}\backslash\Delta_k$, $E_1^{(k)}(t) = E(\omega_k^{(1)}, t)\bigcup E(\omega_k^{(3)}, t)$, $E_2^{(k)}(t) = E(\omega_k^{(2)}, t)\bigcup E(\omega_k^{(4)}, t)$ с предписанными, соответственно, значениями $(0, 1, \sqrt{\alpha})$. Емкость конденсатора $C_t(\Delta_k)$ определяется аналогично предыдущему при помощи класса $\mathbb{V}_k$ — всех вещественных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций, равных нулю в некоторой окрестности множества $E_0^{(k)}$, и соответственно, 1 и $\sqrt{\alpha}$ — на множествах $E_1^{(k)}(t)$ и $E_2^{(k)}(t)$, $k = \overline{1,n}$. Конденсатору $C_t(\{B_k\}_{k=1}^{2n})$ сопоставим семейство конденсаторов

$$C_t^{(k)} := C_t^{(k)}(\{B_k\}_{k=1}^{2n}) := \Big(\widetilde{E}_0(k), \widetilde{E}_1^{(k)}(t), \widetilde{E}_2^{(k)}(t)\Big), \quad k = \overline{1,n}, \tag{4.2.9}$$

где $\widetilde{E}_0(k)$ есть объединение образа множества $(E_0 \bigcap \overline{P_k}(A_n))$ при отображении $z_k(w)$ и его симметричного отражения относительно вещественной оси, а $\widetilde{E}_s^{(k)}(t)$ – объединение образа множества $E_s(t) \bigcap \overline{P_k}(A_n)$, $s = 1, 2$, $k = \overline{1,n}$, при отображении $z_k(w)$, $k = \overline{1,n}$, и его симметричного отражения относительно вещественной оси.

Аналогично предыдущему, каждому конденсатору $C_t^{(k)}$ предписан набор чисел: $(0, 1, \sqrt{\alpha})$. При разделяющем преобразовании получаем

$$\operatorname{cap} C_t\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_t^{(k)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_t(\Delta_k). \tag{4.2.10}$$

Отсюда и из (4.2.8) непосредственно следует

$$\left|C_t\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)\right| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|C_t^{(k)}\right|^{-1}\right)^{-1} = 2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\operatorname{cap} C_t(\Delta_k)\right|^{-1}\right)^{-1}. \tag{4.2.11}$$

Коэффициенты разделяющего преобразования определим, согласно работам [108] – [110], из следующих асимптотических представлений:

$$\big|z_k(w) - z_k(a_{2k-1})\big| = \frac{1}{\alpha_k}|w - a_{2k-1}| + o(1), \quad w \to a_{2k-1},\, w \in \overline{P_k},$$

$$\big|z_k(w) - z_k(a_{2k+1})\big| = \frac{1}{\alpha_k}|w - a_{2k+1}| + o(1), \quad w \to a_{2k+1},\, w \in \overline{P_k},$$

$$\big|z_k(w)-z_k(a_{2k})\big| = \frac{1}{\alpha_k}|w-a_{2k}|+o(1), \quad w\to a_{2k},\, w\in P_k. \quad (4.2.12)$$

Используя результаты работ [108–110], приходим к следующему асимптотическому равенству:

$$\Big|C_t\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)\Big| = \frac{\varkappa}{2\pi}\log\frac{1}{t}+\mathcal{L}\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)+o(1), \quad t\to 0, \quad (4.2.13)$$

где $\varkappa=[n(1+\alpha)]^{-1}$,

$$\mathcal{L}\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)=\frac{\varkappa^2}{2\pi}\left[\log\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k-1},a_{2k-1})r^{\alpha}(B_{2k},a_{2k})\right].$$

Принимая во внимание соотношения (4.2.12), получаем выражения, аналогичные (4.2.13), для конденсаторов $C_r(\Delta_k)$, $k=\overline{1,n}$, —

$$\Big|C_t(\Delta_k)\Big| = \frac{\varkappa_k}{2\pi}\log\frac{1}{t}+L_k+o(1), \quad t\to 0, \quad (4.2.14)$$

где $\varkappa_k=[2(1+\alpha)]^{-1}$,

$$L_k=\frac{\varkappa_k^2}{2\pi}\left\{\log\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)}\cdot\frac{r\left(\Omega_k^{(3)},\omega_k^{(3)}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)}\right]^{\alpha}\cdot\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)}\right]^{\alpha}\cdot\exp 2\alpha g_{\Delta_k}\left(\omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)\right\}.$$

С учетом (4.2.14) нетрудно видеть, что

$$\Big|C_t(\Delta_k)\Big|^{-1}=$$

$$=\frac{2\pi[2(1+\alpha)]}{\log\frac{1}{t}}\left(1+\frac{2\pi[2(1+\alpha)]}{\log\frac{1}{t}}L_k+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{2\pi[2(1+\alpha)]}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{2\pi[2(1+\alpha)]}{\log\frac{1}{t}}\right)^2 L_k+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\right), \quad t\to 0.$$

Отсюда сразу же следует

$$\sum_{k=1}^{n}\Big|C_t(\Delta_k)\Big|^{-1}=$$

$$=\frac{2\pi[2(1+\alpha)]n}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{2\pi[2(1+\alpha)]}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}L_k+o\left(\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-2}\right),\quad t\to 0.$$

Далее, очевидно, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\Big|C_t(\Delta_k)\Big|^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{2\pi[2(1+\alpha)]n}\left(1-\frac{2\pi[2(1+\alpha)]}{n\cdot\log\frac{1}{t}}\sum_{k=1}^{n}L_k+o\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1}\right)=$$

$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{2\pi[2(1+\alpha)]n}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}L_k+o(1),\quad t\to 0.$$

Последнее соотношение, с учетом (4.2.11) и (4.2.13), позволяет записать неравенство:

$$\frac{\log\frac{1}{t}}{2\pi[n(1+\alpha)]}+\mathcal{L}\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant 2\left[\frac{\log\frac{1}{t}}{2\pi[2(1+\alpha)]n}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}L_k+o(1)\right].$$

Отсюда, после сокращения особенностей и перехода к пределу при $t\to 0$, получаем соотношения

$$\mathcal{L}\left(\{B_k\}_{k=1}^{2n}\right)\leqslant\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}L_k. \tag{4.2.15}$$

Изучим (4.2.15) более детально. Используя соотношения (4.2.13) — (4.2.15), приходим к следующему выражению:

$$\frac{1}{2\pi[n(1+\alpha)]^2}\left\{\log\prod_{k=1}^{n}r(B_{2k-1},a_{2k-1})r^{\alpha}(B_{2k},a_{2k})\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n^2}\cdot\frac{1}{2\pi[2(1+\alpha)]^2}\left\{\log\prod_{k=1}^{n}\alpha_k^{2(1+\alpha)}r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(3)},\omega_k^{(3)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times r^{\alpha}\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)\cdot\exp 2\alpha g_{\Delta_k}\left(\omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)\right\}.$$

Теперь, после выполнения необходимых преобразований, несложно перейти к такому утверждению

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k-1},a_{2k-1})r^{\alpha}(B_{2k},a_{2k})\leqslant$$

$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^{1+\alpha}\left\{\prod_{k=1}^{n} r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(3)},\omega_k^{(3)}\right)\times\right. \tag{4.2.16}$$

$$\left.\times r^{\alpha}\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)\cdot r^{\alpha}\left(\Omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)\cdot\exp 2\alpha g_{\Delta_k}\left(\omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Исходя из конкретного вида отображений $z = z_k(w)$, нетрудно убедиться, что $z_k(a_{2k-1}) = 1$, $z_k(a_{2k+1}) = -1$, $\omega_k^{(2)} = z_k(a_{2k}) = \exp i\lambda_k$, $0 < \lambda_k < \pi$, $k = \overline{1,n}$. Для тех значений $k$, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, для которых $\lambda_k \neq \frac{\pi}{2}$, проведем отображение на множества $\Delta_k$ при помощи конформного автоморфизма $\overline{\mathbb{C}}$ вида $t = \frac{z-x}{1-zx}$, где $x$ — точка пересечения вещественной оси и неевклидовой геодезической, соединяющей точки $\omega_k^{(2)}$ и $\overline{\omega_k^{(2)}}$. При таком отображении точки $1$, $-1$, $\omega_k^{(2)}$ преобразуются, соответственно, в точки $1$, $-1$, $i$. Образ всего множества $\Delta_k$ обозначим $\check{\Delta}_k$. Далее, будут выполняться соотношения:

$$r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)r\left(\Omega_k^{(3)},-1\right)\times$$

$$\times r^{\alpha}\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)r^{\alpha}\left(\Omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)\cdot\exp 2\alpha g_{\Delta_k}\left(\omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)=$$

$$=4\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},1\right)r\left(\Omega_k^{(3)},-1\right)}{4}\times$$

$$\times\left[\frac{r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)r\left(\Omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)}{|\omega_k^{(2)}-\overline{\omega_k^{(2)}}|^2}\exp 2g_{\Delta_k}\left(\omega_k^{(2)},\overline{\omega_k^{(2)}}\right)\right]^{\alpha}2^{2\alpha}\left|\sin^{2\alpha}\lambda_k\right|=$$

$$= r\left(\check{\Omega}_k^{(1)}, 1\right) r\left(\check{\Omega}_k^{(3)}, -1\right) \times \tag{4.2.17}$$
$$\times \left[ r\left(\check{\Omega}_k^{(2)}, i\right) r\left(\check{\Omega}_k^{(2)}, -i\right) \cdot \exp 2g_{\check{\Delta}_k}(i,-i)\right]^{\alpha} \cdot \sin^{2\alpha}\lambda_k \leqslant$$
$$\leqslant r\left(\check{\Omega}_k^{(1)}, 1\right) r\left(\check{\Omega}_k^{(3)}, -1\right) \left[ r\left(\check{\Omega}_k^{(2)}, i\right) r\left(\check{\Omega}_k^{(2)}, -i\right) \cdot \exp 2g_{\check{\Delta}_k}(i,-i)\right]^{\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant r(D_4,1) r(D_4,-1) \left[ r(D_4,i) r(D_4,-i)\right]^{\alpha}.$$

Здесь использована инвариантность относительно конформных автоморфизмов плоскости комплексных чисел функции Грина и функционала

$$\frac{r(B_1,a_1)r(B_2,a_2)}{|a_1-a_2|^2},$$

а также теорема 4.2.1. Из соотношений (4.2.16) и (4.2.17) непосредственно следует, что

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_{2k-1}, a_{2k-1}) r^{\alpha}(B_{2k}, a_{2k}) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^{1+\alpha} \left[ r(D_4,1) r^{\alpha}(D_4,i) r(D_4,-1) r^{\alpha}(D_4,-i)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

На основании теоремы 4.2.1 получаем, что знак равенства в этом неравенстве реализуется тогда и только тогда, когда $\widetilde{\Delta}_k = D_4$, $k = \overline{1,n}$. Отсюда нетрудно также получить, что $\alpha_k(A_n) = \frac{2}{n}$, $k = \overline{1,n}$, и что равенство в последнем неравенстве реализуется тогда и только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -w^{n-2}\frac{(1-\alpha)w^{2n} + 2(1+\alpha)w^n + (1-\alpha)}{(1-w^{2n})^2}\,dw^2.$$

Теорема 4.2.2 полностью доказана.

# ГЛАВА 5

# ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ $(n, m)$-ЛУЧЕВЫХ СИСТЕМ ТОЧЕК ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ $m$

## 5.1 Оценки функционалов первого типа для $n$-лучевых систем точек

**5.1.1. Экстремальные задачи первого типа для $n$-лучевых систем точек.** Напомним, что в пункте 2.2 мы условились $(n, 1)$-лучевые системы называть $n$-лучевыми и для них были определены величины $\theta_k(A_n)$, $\alpha_k(A_n)$, $k = \overline{1, n}$. Наряду с функционалом $M_R(A_n)$, рассмотренным в п.2.2, для множества всех $n$-лучевых систем введем такой "управляющий" функционал:

$$\mathcal{L}\left(\{a_k\}_{k=1}^n\right) := \mathcal{L}(A_n) := \prod_{k=1}^n \chi\left(\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|. \qquad (5.1.1)$$

Установлен следующий результат.

**Теорема 5.1.1**. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для любой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любой системы взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \cdot \mathcal{L}(A_n) \cdot \prod_{k=1}^n \alpha_k,$$

*знак равенства в котором реализуется тогда и только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B_k}$, $k = \overline{1, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R)^2}\, dw^2,$$

*где $R^n = \mathcal{L}(A_n)$ и $\operatorname{cap} \widetilde{B_k} \backslash B_k = 0$, $k = \overline{1, n}$.*

***Доказательство.*** Для заданной $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ рассмотрим $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$, $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, $\alpha_k(A_n)$, $\theta_k(A_n)$,

$k=\overline{1,n}$, — объекты, введенные в п. 2.2. Объединение связной компоненты множества $z_k\left(\overline{P_k}\bigcap B_k\right)$, содержащей точку $g_k^{(1)}=z_k(a_k)$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси обозначим $G_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$. В свою очередь, $G_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, будет обозначать объединение связной компоненты множества $z_k\left(\overline{P_k}\bigcap B_{k+1}\right)$, содержащей точку $g_k^{(2)}=z_k(a_{k+1})$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1}=B_1$, $g_n^{(2)}:=z_n(a_{n+1}):=z_n(a_1)$. Аналогично (4.2.12) запишем

$$\begin{gathered}|z_k(w)-z_k(a_k)|=\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}|w-a_k|+o(1),\\ w\to a_k,\ w\in\overline{P_k},\\ |z_k(w)-z_k(a_{k+1})|=\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}|w-a_{k+1}|+o(1),\\ w\to a_{k+1},\ w\in\overline{P_k},\ k=\overline{1,n}.\end{gathered}\tag{5.1.2}$$

Как и прежде, в соответствии с теоремой 1.9 [110] и формулами (5.1.2) имеют место неравенства

$$r(B_k,a_k)\leqslant\left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)},g_{k-1}^{(2)}\right)r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},\quad k=\overline{1,n}.\tag{5.1.3}$$

С учетом (5.1.3), получаем оценку

$$\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[\alpha_{k-1}\alpha_k\cdot|a_k|^2\cdot\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)},g_{k-1}^{(2)}\right)r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right)}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}+\frac{1}{\alpha_k}}}\right]^{\frac{1}{2}}=\tag{5.1.4}$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_{k-1}}+\frac{1}{\alpha_k}\right)}}\left[\prod_{k=1}^{n}r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right)r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Следует отметить, что области $G_k^{(1)}$ и $G_k^{(2)}$ не пересекаются при всех $k=\overline{1,n}$. Кроме того, как нетрудно заметить,

$$g_k^{(1)} = z_k(a_k) = -i\left(e^{-i\theta_k}a_k\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = -i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

$$g_k^{(2)} = z_k(a_{k+1}) = -i\left(e^{-i\theta_k}a_{k+1}\right)^{\frac{1}{\alpha_k}} = i|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \tag{5.1.5}$$

$$\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Преобразуя неравенство (5.1.4) с учетом (5.1.5), приходим к следующим выражениям:

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\alpha_k \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}|a_k| \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\alpha_k \prod_{k=1}^{n}|a_k|\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k \prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из соотношения (5.1.1) вытекает, что

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\tag{5.1.6}$$

$$\leqslant 2^n\mathcal{L}(A_n)\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, из соотношений (5.1.6) следует, что

$$\left[2^n\mathcal{L}(A_n)\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{-1}\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right)r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}|^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.1.7}$$

В силу известного неравенства М.А. Лаврентьева [110,158] получаем

$$\frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right)r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}|^2}\leqslant 1,\quad k=\overline{1,n}, \tag{5.1.8}$$

причем знак равенства в (5.1.8) достигается тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{G}_k^{(2)}=\overline{\mathbb{C}}\backslash\widetilde{G}_k^{(1)},\quad \widetilde{G}_k^{(1)}=S(G(\rho)),$$

$$G(\rho)=\left\{z:\left|\frac{z-g_k^{(1)}}{z-g_k^{(2)}}\right|<\rho\right\},\quad \rho\in\mathbb{R}^+,\quad S=\frac{g_k^{(1)}-g_k^{(2)}t}{1-t}.$$

Сопоставляя (5.1.7) и (5.1.8), приходим к выводу, что

$$\left[2^n\mathcal{L}(A_n)\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{-1}\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant 1. \tag{5.1.9}$$

Равенство в (5.1.9) достигается тогда и только тогда, когда в неравенствах (5.1.3) и (5.1.8) одновременно реализуется знак равенства при всех $k=\overline{1,n}$. В силу леммы 3.1.3 получаем, что для реализации знака равенства в (5.1.9) необходимо, чтобы

$$B_k\subset\{w:\,\theta_k<\arg w<\theta_{k+1}\},\quad k=\overline{1,n}.$$

Из последнего получаем, что точки $w=0$ и $w=\infty$ не являются внутренними для областей $B_k$, $k=\overline{1,n}$. Таким образом, область $\widetilde{G}_k^{(2)}$, $k=\overline{1,n}$, является, в точности, верхней полуплоскостью $\operatorname{Im}z>0$,

$\widetilde{G}_k^{(1)}$, $k=\overline{1,n}$, — нижней, и необходимо выполняется условие $|g_k^{(1)}| = |g_k^{(2)}|$, $k=\overline{1,n}$. Кроме того, из условий реализации знака равенства в (5.1.3) [110] получаем симметричность $B_k$ относительно луча $\arg w = \theta_k$, $k=\overline{1,n}$. Отсюда, кроме того, следует, что $\alpha_k = \frac{2}{n}$, $k=\overline{1,n}$. Таким образом, равенство в неравенстве (5.1.9) может быть тогда и только тогда, когда $\widetilde{B}_k$, $a_k$, $k=\overline{1,n}$, являются, соответственно, круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Далее для системы взаимно непересекающихся областей выполняются равенства $r(B_k,a_k) = r(\widetilde{B}_k,a_k)$, $k=\overline{1,n}$. В этом случае, как и в главе 3, возникает неравенство

$$h_k(w) = g_{\widetilde{B}_k}(w,a_k) - g_{B_k}(w,a_k) \geqslant 0, \quad k=\overline{1,n},$$

в котором во всех регулярных точках границы $B_k$ выполняется равенство, что, в силу принципа максимума для гармонических функций, обеспечивает равенство $h_k(w)\equiv 0$, $\;w\in B_k$, $k=\overline{1,n}$. Последнее соотношение приводит нас к выводу о том, что $\operatorname{cap}(\widetilde{B}_k\backslash B_k) = 0$, $k=\overline{1,n}$, если имеет место знак равенства в (5.1.9). Теорема 5.1.1 доказана.

**5.1.2. Оценки функционалов первого типа для $n$-лучевых систем точек и открытых множеств.** Теорему 5.1.1 можно значительно обобщить. А именно: для открытых множеств, удовлетворяющих первому условию неналегания, удается доказать следующий результат.

**Теорема 5.1.2**. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и любого открытого множества $D$, $A_n\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k)\cdot\prod_{p\neq l}\exp g_D(a_p,a_l) \leqslant 2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mathcal{L}(A_n).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, когда $\{a_k\}$, $k=\overline{1,n}$, и множество $D$ являются, соответственно,* *полюсами и объединением всех круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2}\, dw^2,$$

*где* $R^n = \mathcal{L}(A_n)$.

***Доказательство.*** Прежде всего отметим, что из условия неналегания следует, что множество $D$ обладает обобщенной функцией Грина $g_D(w, a)$. Рассмотрим множества $\mathcal{E}_0 = \overline{\mathbb{C}} \backslash D$; $\mathcal{E}_t(a_k) = \{w : |w - a_k| \leqslant t\}$, $k = \overline{1, n}$, $t \in \mathbb{R}^+$. Для достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$ рассмотрим конденсатор $C(t, D, A_n) = \{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1(t)\}$, где $\mathcal{E}_1(t) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathcal{E}_t(a_k)$. Емкостью конденсатора, как мы уже отмечали выше, называется величина (см. [111, 112]) $\operatorname{cap} C(t, D, A_n) = \inf \iint \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right] dxdy$, где точная нижняя грань берется по классу всех вещественных, непрерывных и липшицевых на $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$, обращающимся в нуль в некоторой окрестности множества $\mathcal{E}_0$ и равным 1 на $\mathcal{E}_1(t)$. Для произвольного конденсатора $C$ полагаем по определению $\left|C\right| := \left[\operatorname{cap} C\right]^{-1}$. Величина $\left|C\right|$ называется модулем конденсатора $C$. Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(t, D, A_n)$ относительно семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$ и системы областей $P(A_n)$, где $z = z_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$, $P(A_n) = \{P_k(A_n)\}_{k=1}^{n}$ (см. п. 2.2). Введем в рассмотрение следующие конденсаторы:

$$C_k(t, D) = \left\{\mathcal{E}_0^{(k)}, \mathcal{E}_1^{(k)}(t)\right\}, \quad k = \overline{1, n}$$

где $\mathcal{E}_0^{(k)}$ есть объединение образа множества $\mathcal{E}_0 \bigcap \overline{P_k}(A_n)$ при отображении $z = z_k(w)$ с его симметричным отражением относительно мнимой оси, а $\mathcal{E}_1^{(k)}(t)$ – объединение образа множества $\mathcal{E}_1(t) \bigcap \overline{P_k}(A_n)$ при отображении той же функцией $z = z_k(w)$ с его симметричным отражением относительно мнимой оси. При разделяющем преобразовании относительно семейства $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$ и системы областей $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^{n}$ конденсатору $C(t, D, A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t, D, )\}_{k=1}^{n}$, симметричных относительно мнимой оси.

Используя результаты работ [109, 111, 112] получаем неравенство

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k(t, D),$$

из которого немедленно следует

$$\bigl|C(t, D, A_n)\bigr| \leqslant 2 \left( \sum_{k=1}^{n} \bigl|C_k(t, D)\bigr|^{-1} \right)^{-1}.$$

Далее, из теоремы 1 [111] получаем

$$\bigl|C(t, D, A_n)\bigr| = \frac{1}{2\pi n} \log \frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1), \qquad t \to 0,$$

где

$$M(D, A_n) = \frac{1}{2\pi n^2} \left[ \sum_{k=1}^{n} r(D, a_k) + \sum_{k \neq p} g_D(a_k, a_p) \right].$$

Для конденсаторов $C_k(t, D)$ справедливо асимптотическое представление

$$\bigl|C_k(t, D)\bigr| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \log \frac{1}{t} + M_k(D) + o(1), \qquad t \to 0,$$

где

$$M_k(D) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{4} \left[ \log \frac{r(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}) r(G_k^{(2)}, g_k^{(2)})}{\left[ \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\alpha_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} \right]} \right],$$

области $G_k^{(s)}$ и точки $g_k^{(s)}$ определены при доказательстве теоремы 5.1.1, $k = \overline{1, n}$, $s = 1, 2$. В этом случае имеет место соотношение

$$\bigl|C_k(t, D)\bigr|^{-1} =$$

$$= \left( \frac{\log \frac{1}{t}}{4\pi} \right)^{-1} \left( 1 + \frac{4\pi}{\log \frac{1}{t}} M_k(D) + o\left( \left( \log \frac{1}{t} \right)^{-1} \right) \right) =$$

$$= \frac{4\pi}{\log \frac{1}{t}} - \left( \frac{4\pi}{\log \frac{1}{t}} \right)^2 M_k(D) + o\left( \left( \log \frac{1}{t} \right)^{-2} \right), \quad t \to 0.$$

Как нетрудно заметить,

$$\sum_{k=1}^{n} \left|C_k(t,D)\right|^{-1} =$$

$$= \frac{4\pi n}{\log \frac{1}{t}} - \left(\frac{4\pi}{\log \frac{1}{t}}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k(D) + o\left(\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-2}\right), \quad t \to 0.$$

Из последнего асимптотического равенства немедленно получаем, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left|C_k(t,D)\right|^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\log \frac{1}{t}}{4\pi n} \left(1 - \frac{4\pi}{\log \frac{1}{t}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k(D) + o\left(\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-1}\right)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\log \frac{1}{t}}{4\pi n} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D) + o(1), \quad t \to 0.$$

Наконец, все предыдущие рассуждения дают неравенство

$$\frac{1}{2\pi n} \log \frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi n} \log \frac{1}{t} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D) + o(1), \quad t \to 0.$$

После сокращения особенностей и предельного перехода при $t \to 0$ приходим к неравенству

$$M(D, A_n) \leqslant \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D),$$

что дает соотношение

$$\frac{1}{2\pi n^2} \left[\sum_{k=1}^{n} \log r(D, a_k) + \sum_{k \neq p} g_D(a_k, a_p)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n^2}\,\frac{1}{8\pi}\log\prod_{k=1}^{n}\alpha_k^2\cdot\frac{r(G_k^{(1)},g_k^{(1)})r(G_k^{(2)},g_k^{(2)})}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}.$$

Преобразовывая последнее выражение, приходим к неравенству

$$\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\prod_{k\neq p}\exp g_D(a_k,a_p)\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k\cdot a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left[\prod_{k=1}^{n}r(G_k^{(1)},g_k^{(1)})r(G_k^{(2)},g_k^{(2)})\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k\cdot a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}|a_k|\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r(G_k^{(1)},g_k^{(1)})r(G_k^{(2)},g_k^{(2)})}{|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь использованы равенства:

$$g_k^{(1)}=z_k(a_k)=-i|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad g_k^{(2)}=z_k(a_{k+1})=i|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

$$\left|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}\right|=|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}},\quad k=\overline{1,n}.$$

С учетом несложных преобразований приходим к такому выражению:

$$\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\prod_{k\neq p}\exp g_D(a_k,a_p)\leqslant$$

$$\leqslant 2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_k|\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r(G_k^{(1)},g_k^{(1)})r(G_k^{(2)},g_k^{(2)})}{|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

По построению области $G_k^{(1)}$ и $G_k^{(2)}$ не пересекаются при всех $k=\overline{1,n}$, поэтому, в силу результата М.А. Лаврентьева, выполняется неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{r(G_k^{(1)},g_k^{(1)})r(G_k^{(2)},g_k^{(2)})}{|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}|^2}\leqslant 1,\quad k=\overline{1,n}.$$

Окончательно получаем требуемое неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}r(D,a_k)\prod_{k\neq p}\exp g_D(a_k,a_p)\leqslant 2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mathcal{L}(A_n).$$

Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. Теорема 5.1.2 доказана.

### 5.1.3. Некоторые следствия.

Ряд следствий из теорем 5.1.1 и 5.1.2 представляют значительный интерес.

**Следствие 5.1.1.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{L}(A_n) = R^n$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (2R)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap} \widetilde{B}_k \backslash B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$.

**Следствие 5.1.2.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $R \in \mathbb{R}^+$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mathcal{L}(A_n) = R^n$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4R}{n}\right)^n,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap} \widetilde{B}_k \backslash B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$.

Следствие 5.1.2 вытекает из следствия 5.1.1 ввиду очевидного неравенства $\prod\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n$, в котором знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $\alpha_k=\frac{2}{n}$, $k=\overline{1,n}$.

Полагая в следствии 5.1.1 $R=1$ приходим к следующему результату.

**Следствие 5.1.3** [34]. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$. Тогда для всякой n-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}(A_n)=1$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant 2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\alpha_k,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{1,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}_k\backslash B_k=0$, $k=\overline{1,n}$.

Полагая $R=1$ в следствии 5.1.2 получим следующий результат.

**Следствие 5.1.4.** *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$. Тогда для всякой n-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}(A_n)=1$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^n,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{1,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{w^{n-2}}{(w^n-1)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}_k\backslash B_k = 0$, $k=\overline{1,n}$.

Следствия 5.1.3 и 5.1.4 существенно обобщают лемму 3.1.2 и теорему 2.3.8 соответственно. Отметим, что следствие 5.1.3, вообще говоря, сильнее следствия 3.1.14, полученного из теоремы 3.1.1, хотя по форме они и близки.

Запишем соотношения

$$1 = \mathcal{L}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) \prod_{k=1}^{n} |a_k| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) \prod_{k=1}^{n} |a_k| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\left|\frac{a_k}{R}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \cdot \left|\frac{R}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} + \left|\frac{a_{k+1}}{R}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \cdot \left|\frac{R}{a_k}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) \prod_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\left|\frac{a_k}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}} + \left|\frac{R}{a_k}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left|\frac{a_{k+1}}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}} + \left|\frac{R}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^{n} |a_k| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}}\right) \chi\left(\left|\frac{a_k}{R}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} |a_k| = M_R(A_n).$$

И как следует из последнего, при $R = 1$ множество систем $\mathbb{A}_1 = \{A_n : \mathcal{L}(A_n) = 1\}$ существенно шире множества систем $\mathbb{A}_2 = \{A_n : M(A_n) = 1\}$. Таким образом, $\mathbb{A}_0 \subset \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{A}_1$, где $\mathbb{A}_0$ — множество всех наборов различных точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$.

**Следствие 5.1.5.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $R \in \mathbb{R}^+$. *Тогда для всякой* $n$*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $\mathcal{L}(A_n) = R^n$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} r(B_k^0, a_k^0),$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $a_k = a_k^0$, $\widetilde{B}_k = B_k^0$, $\operatorname{cap} B_k^0\backslash B_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, *где*

*$a_k^0$ и $B_k^0$, $k=\overline{1,n}$, — соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

Полагая в теореме 5.1.2 $\mathcal{L}(A_n)=R^n$, приходим к обобщению следствия 5.1.1.

**Следствие 5.1.6** [41]. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$ и $R\in\mathbb{R}^+$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}(A_n)=R^n$, и любого открытого множества $D$, $A_n\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k)\prod_{k\neq p}\exp g_D(a_k,a_p)\leqslant(2R)^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\alpha_k,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, тогда, когда $a_k$, $k=\overline{1,n}$, и $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

**Следствие 5.1.7.** *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$ и $R\in\mathbb{R}^+$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}(A_n)=R^n$, и любого открытого множества $D$, $A_n\subset D\subset\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k)\prod_{k\neq p}\exp g_D(a_k,a_p)\leqslant\left(\frac{4R}{n}\right)^n,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, тогда, когда $a_k$, $k=\overline{1,n}$, и $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n-R^n)^2}\,dw^2.$$

При $R = 1$ следствия 5.1.6 и 5.1.7 значительно обобщают, соответственно, следствия 5.1.3 и 5.1.4.

**Следствие 5.1.8.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{L}(A_n) = 1$, и любого открытого множества $D$, $A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \prod_{k \neq p} \exp g_D(a_k, a_p) \leqslant 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, тогда, когда $a_k$, $k = \overline{1, n}$, и $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

**Следствие 5.1.9.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{L}(A_n) = 1$, и любого открытого множества $D$, $A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \prod_{k \neq p} \exp g_D(a_k, a_p) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, тогда, когда $a_k$, $k = \overline{1, n}$, и $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

**Следствие 5.1.10.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{L}(A_n) = 1$, и любого открытого множества $D$, $A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего* *первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \leqslant 2 \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, тогда, когда $a_k$, $k = \overline{1, n}$, и $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

**Следствие 5.1.11.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{L}(A_n) = 1$, и любого открытого множества $D$, $A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^{n},$$

*причем знак равенства в этом неравенстве достигается, в частности, тогда, когда $a_k$, $k = \overline{1, n}$, и $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

**Следствие 5.1.12.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ и $R \in \mathbb{R}^{+}$. Тогда для всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{L}(A_n) = R^n$, и любого открытого множества $D$, $A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего первому условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k \neq p} \exp g_D(a_k, a_p) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(B_k^0, a_k^0\right)}{r(D, a_k)},$$

*где* $a_k^0$ *и* $B_k^0$, $k = \overline{1,n}$, *— соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2}\, dw^2.$$

Наконец, из теоремы 5.1.1 можно получить решение экстремальной задачи о неналегающих областях в классической постановке.

**Следствие 5.1.13.** *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ *и* $R \in \mathbb{R}^+$. *Тогда для всякой* $n$*-лучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такой, что* $\mathcal{L}(A_n) = R^n$, *и любой системы взаимно непересекающихся односвязных областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \left|f_k'(0)\right| \leqslant (2R)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

*где* $w = f_k(z)$, $k = \overline{1,n}$ *— функции, конформно и однолистно отображающие единичный круг* $U$ *на области* $B_k$, *причем* $f_k(0) = a_k$. *Знак равенства в этом неравенстве реализуется тогда и только тогда, когда* $a_k^0$ *и* $B_k^0$, $k = \overline{1,n}$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - R^n)^2}\, dw^2.$$

В качестве приложения теоремы 5.1.1 можно получить некоторые результаты об искажении при однолистном отображении, усиливающие теорему 3.1.4.

**Теорема 5.1.3**. [52]. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\rho \in (0,1)$, $z_k = \rho \exp\left(i\frac{2\pi}{n}(k-1)\right)$, $k = \overline{1, n+1}$. *Тогда для любой функции* $f \in S^*$ *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \left|f'(z_k)\right| \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n \left(\rho\frac{1-\rho^n}{1+\rho^n}\right)^{-n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mathcal{L}\left(\{f(z_k)\}_{k=1}^n\right),$$

*где* $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \arg \frac{f(z_{k+1})}{f(z_k)}$. *Равенство в этом неравенстве достигается для функции*

$$f(z) = z(1 - z^n)^{-\frac{2}{n}}.$$

***Доказательство.*** Рассмотрим $n$-лучевую систему точек $A_n = \{f(z_k)\}_{k=1}^{n}$ и набор секторов $\Delta_k = \left\{w \in U : \left|\arg w - \frac{2\pi}{n}(k-1)\right| < \frac{\pi}{n}\right\}$, $k = \overline{1,n}$, $\Delta_{n+1} = \Delta_1$. Области $f(\Delta_k) = B_k$, $f(z_k) \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, образуют систему взаимно station неналегающих областей. В силу теоремы 5.1.1 получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, f(z_k)\right) \leqslant 2^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \mathcal{L}(A_n).$$

Пусть $z = \varphi_k(\xi)$ обозначает однолистное и конформное отображение $U$ на $\Delta_k$, $\varphi_k(0) = z_k$, $k = \overline{1,n}$. Тогда можем записать равенство

$$r\left(B_k, f(z_k)\right) = \left|f'(z_k)\right| \cdot \left|\varphi_k'(0)\right|,$$

из которого следует, что

$$\prod_{k=1}^{n} \left|f'(z_k)\right| \cdot \left|\varphi_k'(0)\right| \leqslant 2^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{f(z_k)}{f(z_{k+1})}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) \left|f(z_k)\right|.$$

Далее, справедливо соотношение (см. [106, 109, 117])

$$\left|\varphi_k(0)\right| = \frac{4\rho}{n} \cdot \frac{1-\rho^n}{1+\rho^n}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

И значит,

$$\prod_{k=1}^{n} \left|f'(z_k)\right| \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \left(\rho \frac{1-\rho^n}{1+\rho^n}\right)^{-n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \mathcal{L}(A_n).$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема 5.1.3 доказана.

Аналогичные оценки получены в работах [108–111].

**5.1.4. Задачи первого типа для $(n,2)$-лучевых систем точек. Теорема 5.1.4.** В 1978 году в работе [106] получен результат, из которого, в частности, следует решение задачи первого типа (с полным описанием множества экстремалей) для функционала $J = \prod\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p})$, где $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$,

— $(n, 2)$-лучевая система точек такая, что $|a_{k,1}| = \rho$, $a_{k,1}\overline{a}_{k,2} = R^2$ при $\rho$, $R \in \mathbb{R}^+$, $\rho < R$, а система попарно непересекающихся (многосвязных) областей, удовлетворяющая условиям: $B_{k,1} \subset U_R$, $B_{k,2}$, $k = \overline{1, n}$, — симметрична области $B_{k,1}$ относительно окружности $\partial U_R$. В 1987 году Е.Г. Емельяновым в работе [117] была рассмотрена, в случае односвязных областей, более общая задача первого типа для такого же функционала и $(n, 2)$-лучевой системы точек, расположенных на двух концентрических окружностях, причем условие $B_{k,1} \subset U_R$, $k = \overline{1, n}$, было снято. В этой работе был предложен оригинальный метод исследования, и для случая односвязных областей получен исчерпывающий результат. В 1997 году В.Н. Дубининым в работе [111] получено нестандартное обобщение этого результата на случай специальных систем открытых множеств. А.К. Бахтиным в диссертации на соискание ученой степени доктора физико–математических наук был предложен метод исследования, базирующийся на кусочно-разделяющем преобразовании [108–110], позволяющий значительно усилить результат работы [117]. Получены некоторые следствия этих результатов.

Для произвольной $(n, 2)$-лучевой системы точек $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = 1, 2$ рассмотрим следующие "управляющие" функционалы

$$\mathcal{L}(A_{n,2}) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_{k,p}|,$$

$$\mathcal{L}_p(A_{n,2}) = \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right) |a_{k,p}|, \quad p = 1, 2.$$

Пусть $z = z_k(w)$ и $P_k(A_{n,2})$ — те же, что и при построении функции (2.2.12) в п. 2.2. Тогда для произвольной $(n, 2)$-лучевой системы точек будем полагать

$$\omega_{k,p}^{(1)} = z_k(a_{k,p}), \quad \omega_{k,p}^{(2)} = z_k(a_{k+1,p}),$$

$$\omega_{n,p}^{(2)} = z_n(a_{1,p}), \quad k = \overline{1, n}, \ p = 1, 2.$$

Таким образом, каждой области $P_k(A_{n,2})$ посредством функции $z_k(w)$ сопоставляется четверка точек $\Omega_k := \{\omega_{k,1}^{(1)}, \omega_{k,1}^{(2)}, \omega_{k,2}^{(1)}, \omega_{k,2}^{(2)}\}$,

$k = \overline{1,n}$, и в свою очередь, любой заданной системе $A_{n,2}$ однозначно сопоставляется набор $\{\Omega_k\}_{k=1}^{n}$. Построим конформный автоморфизм $\lambda_k(z)$ плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$, при котором набор точек $\Omega_k$ преобразуются в набор точек $\Omega_k^0 = \{-i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}, i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}, -i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}}, i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}},\}$, $0 < \rho_k < 1$, $k = \overline{1,n}$. Отобразим, сначала, плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$ при помощи функции $t_1 = T_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$, при этом отображении $\Omega_k$, $k = \overline{1,n}$, преобразуется в набор точек единичной окружности $U$, причем $\operatorname{Im} T_1(\omega_{k,p}^{(1)}) < 0$, $\operatorname{Im} T_1(\omega_{k,p}^{(2)}) > 0$, $p = 1,2$, $k = \overline{1,n}$. Далее применяем преобразование из п. 3.1.3: $t_2 = T_2(w) = e^{i\theta}\frac{(w-b_k)}{(1-\overline{b}_k w)}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, где $b_k$ — точка пересечения неевклидовых геодезических соединяющих $T_1(\omega_{k,1}^{(1)})$ с $T_1(\omega_{k,2}^{(2)})$ и $T_1(\omega_{k,2}^{(1)})$ с $T_1(\omega_{k,1}^{(2)})$. В результате такого преобразования точки исходного набора $\Omega_k$ преобразуются в вершины прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям, причем $\operatorname{Im} T_2\left(T_1(\omega_{k,p}^{(1)})\right) < 0$, $\operatorname{Im} T_2\left(T_1(\omega_{k,p}^{(2)})\right) > 0$, $p = 1,2$, $k = \overline{1,n}$. Теперь, положив $\zeta = T^{-1} \circ T_2 \circ T_1$, получаем искомый автоморфизм $\zeta = \lambda_k(z)$. Таким образом, с каждой $A_{n,2}$ сопоставляется единственный набор $\left\{\Omega_k^0\right\}_{k=1}^{n}$. Далее, обозначим

$$R^0 := R^0(A_{n,2}) := \left[\frac{1-t_0}{1+t_0}\right]^{\frac{1}{n}}, \quad t_0 := t_0(A_{n,2}) := \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

**Теорема 5.1.4**. (А.К. Бахтин [42]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда для любой $(n,2)$-лучевой системы точек $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, такой, что $\mathcal{L}(A_{n,2}) = 1$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant 2^{2n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \cdot \left(\frac{1-(R^0)^n}{1+(R^0)^n}\right)^{2n},$$

*равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $\{a_{k,p}\}$ и $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, являются, соответственно,* *полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^2}{(w^n-(R^0)^n)^2(1-(R^0)^n w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}(\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p}) = 0$, $k=\overline{1,n}$, $p=1,2$.

***Доказательство.*** В основе доказательства лежит метод кусочно–разделяющего преобразования [108–110]. Как и при доказательстве теоремы 5.1.1, рассмотрим $\{P_k(A_{n,2})\}_{k=1}^n$, $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, $\alpha_k(A_{n,2})$, $\theta_k(A_{n,2})$, $k=\overline{1,n}$, — объекты, введенные в главе 2 (п. 2.2). Точно так же построим области $G_{k-1,p}^{(2)}$ и $G_{k,p}^{(1)}$, сопоставляемые области $B_{k,p}$ при разделяющем преобразовании относительно семейств $\{P_k\}_{k=1}^n$ и $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$. Отметим, что по построению $\omega_{k,p}^{(s)} \in G_{k,p}^{(s)}$, $k=\overline{1,n}$, $p,s=1,2$. Так же, как и (5.1.3), учитывая (5.1.2), получаем неравенство

$$r(B_{k,p},a_{k,p}) \leqslant \left[\frac{r\left(G_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(G_{k-1,p}^{(2)},\omega_{k-1,p}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}\cdot\frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (5.1.10)$$

$k=\overline{1,n}$, $p=1,2$. Далее, по аналогии с (5.1.4), устанавливаем соотношение

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p},a_{k,p}) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\left[\alpha_{k-1}\alpha_k|a_{k,p}|^2\,\frac{r\left(G_{k-1,p}^{(2)},\omega_{k-1,p}^{(2)}\right) r\left(G_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)}\right)}{|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k-1}}}}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\frac{|a_{k,p}|}{|a_{k,p}|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\left[r\left(G_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(G_{k,p}^{(2)},\omega_{k,p}^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Нетрудно заметить, что $\left|\omega_{k,p}^{(1)} - \omega_{k,p}^{(2)}\right| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Продолжая рассуждения, подобные проведенным в п. 5.1.1, получаем оценку

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\frac{r\left(G_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right) r\left(G_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}\right)}{\left|\omega_{k,p}^{(1)} - \omega_{k,p}^{(2)}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что области $G_{k,1}^{(1)}$, $G_{k,1}^{(2)}$, $G_{k,2}^{(1)}$, $G_{k,2}^{(2)}$ взаимно не пересекаются. Кроме того, обозначим $E_{k,p}^{(s)} = \lambda_k\left(G_{k,p}^{(s)}\right)$, где $\lambda_k(z)$ — указанный выше автоморфизм плоскости комплексных чисел $\overline{\mathbb{C}}_z$, $k = \overline{1,n}$, $p, s = 1, 2$. Учитывая условие $\mathcal{L}(A_{n,2}) = 1$ и конформную инвариантность функционала

$$J_k = \frac{r\left(G_{k,1}^{(1)}, \omega_{k,1}^{(1)}\right) r\left(G_{k,1}^{(2)}, \omega_{k,1}^{(2)}\right) \cdot r\left(G_{k,2}^{(1)}, \omega_{k,2}^{(1)}\right) r\left(G_{k,2}^{(2)}, \omega_{k,2}^{(2)}\right)}{\left|\omega_{k,1}^{(1)} - \omega_{k,1}^{(2)}\right|^2 \cdot \left|\omega_{k,2}^{(1)} - \omega_{k,2}^{(2)}\right|^2},$$

приходим к следующему неравенству:

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \times$$

$$(5.1.11)$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{r\left(E_{k,1}^{(1)}, -i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) r\left(E_{k,1}^{(2)}, i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)}{4\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{r\left(E_{k,2}^{(1)}, -i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}}\right) r\left(E_{k,2}^{(2)}, i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}}\right)}{4\rho_k^{-\frac{2}{\alpha_k}}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь для того, чтобы получить оценку сверху функционала, стоящего в фигурных скобках правой части (5.1.11), сформулируем следующий вспомогательный результат.

**Лемма 5.1.1**. *При* $k = \overline{1, n}$ *справедливо неравенство*

$$\frac{r\left(E_{k,1}^{(1)}, -i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) r\left(E_{k,1}^{(2)}, i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)}{4\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}} \cdot \frac{r\left(E_{k,2}^{(1)}, -i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}}\right) r\left(E_{k,2}^{(2)}, i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}}\right)}{4\rho_k^{-\frac{2}{\alpha_k}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1-\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right)^4.$$

*Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $\widetilde{E}_{k,p}^{(s)}$, $s, p = 1, 2$, *при каждом* $k$ *являются круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q_k(w)dw^2 = \frac{(1-w^2)^2}{(w^2+\rho_k^2)^2(1+\rho_k^2 w^2)^2}\, dw^2$$

*и кроме того,* $\mathrm{cap}\, \widetilde{E}_{k,p}^{(s)} \backslash E_{k,p}^{(s)} = 0$, $s, p = 1, 2$, $k = \overline{1, n}$.

В односвязном случае эта лемма получена в работе [117]. Для произвольных многосвязных областей этот результат доказан в [111]. Доказательство утверждения леммы о случае реализации знака равенства получается аналогично предыдущему (см., например, доказательства теорем 3.1.1, 4.1.1). На основании леммы 5.1.1 и неравенства (5.1.11) приходим к соотношению

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p}, a_{k,p}) \leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right)^2 = \tag{5.1.12}$$

$$= 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \cdot \left[\frac{1-(R^0)^n}{1+(R^0)^n}\right]^{2n},$$

которое дает равенство теоремы 5.1.4. В случае реализации знака равенства в (5.1.12) необходимо, чтобы равенство достигалось в

(5.1.10) при всех $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$ и выполнялся знак равенства в неравенстве леммы 5.1.1 для всех $k = \overline{1,n}$. Совокупность этих условий с учетом леммы 3.1.3 позволяет получить посредством аналогичных предыдущим рассмотрениям (см. доказательства теорем 3.1.1, 4.1.1), что справедливо утверждение теоремы 5.1.4 о знаке равенства в (5.1.12). Теорема 5.1.4 полностью доказана.

**5.1.5. Некоторые следствия.** Некоторые следствия из теоремы 5.1.4 вытекают непосредственно.

**Следствие 5.1.14.** *Пусть $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0,1)$. Тогда для всякой $(n,2)$-лучевой системы $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, такой, что $\mathcal{L}(A_{n,2}) = 1$, $R^{(0)}(A_{n,2}) = \rho$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{2n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2 \cdot \left(\frac{1-\rho^n}{1+\rho^n}\right)^{2n}.$$

*Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_{k,p}$ и $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^2}{(w^n-\rho^n)^2(1-\rho^n w^n)^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$.

Следствие 5.1.14 дает решение вполне определенной экстремальной задачи.

***Доказательство.*** В силу заданных условий, используя теорему 5.1.4, можем получить неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant 2^{2n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2 \cdot \left[\frac{1-\left(R^{(0)}\right)^n}{1+\left(R^{(0)}\right)^n}\right]^{2n}$$

на множестве систем $A_{n,2}$ таких, что $\mathcal{L}(A_{n,2}) = 1$, $R^{(0)}(A_{n,2}) = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}^+$. Из этого соотношения следует искомое неравенство. Утверждение о знаке равенства следует из теоремы 5.1.4. Следствие 5.1.14 доказано.

**Следствие 5.1.15.** *Пусть* $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, $R, \rho \in \mathbb{R}^+$, $\rho < R$. *Тогда для любой* $(n,2)$*-лучевой системы точек* $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, *такой, что* $\mathcal{L}(A_{n,2}) = R^{2n}$, $R^{(0)}\left(\frac{1}{R} \cdot A_{n,2}\right) = \frac{\rho}{R}$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (2R)^{2n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \cdot \left(\frac{R^n - \rho^n}{R^n + \rho^n}\right)^{2n}.$$

*Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда* $a_{k,p}$ *и* $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)^2}{(w^n - \rho^n)^2(R^{2n} - \rho^n w^n)^2}\, dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\left(\widetilde{B}_{k,p} \backslash B_{k,p}\right) = 0$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$.

***Доказательство.*** Рассмотрим систему точек $\frac{1}{R} \cdot A_{n,2}$, для которой выполняются условия $\mathcal{L}\left(\frac{1}{R} \cdot A_{n,2}\right) = 1$, $R^{(0)}\left(\frac{1}{R} \cdot A_{n,2}\right) = \frac{\rho}{R}$. В силу следствия 5.1.14 имеет место неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B'_{k,p}, a'_{k,p}\right) \leqslant 2^{2n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^n}{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^n}\right]^{2n},$$

где $B'_{k,p}$ и $a'_{k,p}$ — образы $B_{k,p}$ и $a_{k,p}$ при отображении $w' = \frac{1}{R} \cdot w$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$. Очевидно, что $r\left(B'_{k,p}, a'_{k,p}\right) = \frac{1}{R} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right)$. Отсюда следует, что

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (2R)^{2n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \cdot \left[\frac{R^n - \rho^n}{R^n + \rho^n}\right]^{2n}.$$

Случай равенства исследуется аналогично предыдущему. Следствие 5.1.15 доказано.

Кроме того, теперь можно получить существенное обобщение известного результата Е.Г. Емельянова [117]. Действительно, положим $[\mathcal{L}_1(A_{n,2})]^{\frac{1}{n}} =: \lambda$, $[\mathcal{L}_2(A_{n,2})]^{\frac{1}{n}} =: \frac{R^2}{\lambda}$, $[\mathcal{L}(A_{n,2})]^{\frac{1}{n}} = R^2$, $\lambda, R \in \mathbb{R}^+$.

Для произвольной $(n,2)$-лучевой системы $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, и соответствующих значений $\lambda_p = (\mathcal{L}_p(A_{n,2}))^{\frac{1}{n}}$ пусть $A_{n,2}(\lambda) = \{a_{k,p}(\lambda)\}$ обозначает $(n,2)$-лучевую систему точек такую, что

$$a_{k,p}(\lambda) = \lambda_p \cdot \frac{a_{k,p}}{|a_{k,p}|}, \quad k = \overline{1,n},\, p = 1,2,$$

где $\lambda_1 := \lambda$, $\lambda_2 := \frac{R^2}{\lambda}$. Используя данные ранее обозначения, можем записать

$$t_0\left(\frac{1}{R}\cdot A_{n,2}\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$t_0\left(\frac{1}{R}\cdot A_{n,2}(\lambda)\right) = \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{1-\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

**Следствие 5.1.16.** *Пусть $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, R \in \mathbb{R}^+$, $\lambda < R$. Тогда для любой $(n,2)$-лучевой системы точек $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, такой, что $\mathcal{L}(A_{n,2}) = R^{2n}$, $\mathcal{L}_1(A_{n,2}) = \lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R}\cdot A_{n,2}\right) = t_0\left(\frac{1}{R}A_{n,2}(\lambda)\right)$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (2R)^{2n}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\cdot\left[t_0\left(\frac{1}{R}A_{n,2}(\lambda)\right)\right]^{2n}.$$

*Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_{k,p}$ и $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+R^n)^2}{(w^n-\lambda^n)^2(R^{2n}-\lambda^n w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p} = 0$.

***Доказательство.*** Рассмотрим систему точек

$$A'_{n,2} = \frac{1}{R}\cdot A_{n,2} = \left\{a'_{k,p}\right\} = \left\{\frac{1}{R}\cdot a_{k,p}\right\}, \quad k = \overline{1,n},\, p = 1,2.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{L}\left(A'_{n,2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\chi\left(\left|\frac{a'_{k,p}}{a'_{k+1,p}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a'_{k,p}|=$$

$$=\left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\right]\cdot R^{-2n}=\mathcal{L}(A_{n,2})\cdot R^{-2n}=1.$$

Образ области $B_{k,p}$ при отображении $w'=\frac{1}{R}w$ обозначим $B'_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=1,2$. Из теоремы 5.1.4 получаем

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}r\left(B'_{k,p},a'_{k,p}\right)\leqslant 2^{2n}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\cdot\left[\frac{1-\left[R^0\left(A'_{n,2}\right)\right]^n}{1+\left[R^0\left(A'_{n,2}\right)\right]^n}\right]^{2n}.$$

Используя обозначения, можем записать

$$R^0\left(A'_{n,2}\right)=\left[\frac{1-t_0\left(A'_{n,2}\right)}{1+t_0\left(A'_{n,2}\right)}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Отсюда следует, что

$$t_0\left(A'_{n,2}\right)=\frac{1-\left(R^0\left(A'_{n,2}\right)\right)^n}{1+\left(R^0\left(A'_{n,2}\right)\right)^n}.$$

С другой стороны, по определению величины $t_0$, справедливо равенство

$$t_0\left(A'_{n,2}\right)=\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-(\rho'_k)^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+(\rho'_k)^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Из условий следствия 5.1.16 вытекает

$$t_0\left(A'_{n,2}\right)=t_0\left(\frac{1}{R}A_{n,2}(\lambda)\right)=t_0\left(A_{n,2}\left(\frac{\lambda}{R}\right)\right)=\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Далее, отметим, что выполняются равенства

$$r\left(B'_{k,p},a'_{k,p}\right)=R^{-1}\cdot r(B_{k,p},a_{k,p}),\quad k=\overline{1,n},\ p=1,2.$$

В итоге приходим к неравенству

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(B_{k,p},a_{k,p}) = R^{2n}\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B'_{k,p},a'_{k,p}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2R)^{2n}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right]^2 =$$

$$= (2R)^{2n}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\cdot\left[t_0\left(\frac{1}{R}A_{n,2}(\lambda)\right)\right]^{2n}.$$

Утверждение о знаке равенства следует из теоремы 5.1.4. Следствие доказано.

**Следствие 5.1.17.** *Пусть $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, R \in \mathbb{R}^+$, $\lambda < R$. Тогда для любой $(n,2)$-лучевой системы точек $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, такой, что $\mathcal{L}(A_{n,2}) = R^{2n}$, $\mathcal{L}_1(A_{n,2}) = \lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R}\cdot A_{n,2}\right) = t_0\left(\frac{1}{R}A_{n,2}(\lambda)\right)$, и любой системы попарно непересекающихся областей $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant \left(\frac{4R}{n}\right)^{2n}\cdot\left[\frac{R^n-\lambda^n}{R^n+\lambda^n}\right]^{2n}.$$

*Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_{k,p}$ и $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+R^n)^2}{(w^n-\lambda^n)^2(R^{2n}-\lambda^n w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p} = 0$.

Следствие 5.1.17 существенно усиливает теорему 2.3.10.

***Доказательство.*** В силу следствия 5.1.16 справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right) \leqslant (2R)^{2n}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\cdot\left[t_0\left(\frac{1}{R}A_{n,2}(\lambda)\right)\right]^{2n} =$$

$$= (2R)^{2n} \cdot \left[ \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1 + \left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}} \right]^2 .$$

Далее, для продолжения доказательства нам придется существенным образом использовать следующую лемму.

**Лемма 5.1.2**. [117]. *Функция* $y = \ln x \frac{1-\rho^{\frac{1}{x}}}{1+\rho^{\frac{1}{x}}}$ *выпукла вверх по* $x \in (0,1)$ *при каждом фиксированном* $\rho \in (0,1)$.

В [117] доказательство этой леммы не приведено, поэтому для полноты изложения мы даем свой вариант этого доказательства.

***Доказательство леммы 5.1.2.*** Достаточно показать, что

$$y''_{x^2} = -\frac{1}{x^2}\left[1 - \frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{\rho}}{1-\rho^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{2\rho^{\frac{1}{x}}}{1+\rho^{\frac{1}{x}}}\left(2 - \frac{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{\rho}}{1-\rho^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1+\rho^{\frac{2}{x}}}{1+\rho^{\frac{1}{x}}}\right)\right] \leqslant 0$$

при всех $x, \rho \in (0,1)$. Положим $\rho^{\frac{1}{x}} = z = 1-\delta$, $\delta \in (0,1)$, $z \in (0,1)$. Сделаем замену переменной $z = \rho^{\frac{1}{x}}$, и теперь достаточно показать, что

$$\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z} \cdot \frac{2z}{1+z}\left(2 - \frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z} \cdot \frac{1+z^2}{1+z}\right) \leqslant 1$$

при $z \in (0,1)$. Далее, обозначим $z = 1-\delta$, получаем

$$\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z} \cdot \frac{2z}{1+z} = \frac{-\ln(1-\delta)}{\delta} \cdot \frac{1-\delta}{1-\frac{1}{2}\delta} =$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}\delta^k\right)\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\delta}{1-\frac{1}{2}\delta}\right) =$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}\delta^k\right)\left(1 - \sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\delta\right)^p\right) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{1}{n-p+1}\right)\delta^n =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\delta + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\delta^2 + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{n-2}-\ldots-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\delta^n+\ldots=:1-\sum_{n=2}^{\infty}l_n\delta^n,\qquad l_1=0.$$

Этот степенной ряд сходится при любом $\delta\in(0,1)$. Нетрудно видеть, что

$$l_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2^{n-k+1}}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n+1}=$$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\cdot 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{n+1}=$$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)>0$$

при $n\geqslant 2$. Отсюда следует, что

$$0<\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z}\cdot\frac{2z}{1+z}<1$$

при всех $z\in(0,1)$. Далее, аналогично, исследуем величину

$$\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z}\cdot\frac{1+z^2}{1+z}=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\delta^k\right)\left(1-\frac{1}{2}\delta+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\delta}{2}\right)^k\right),$$

предполагая, что

$$\frac{1+z^2}{1+z}=\frac{1-\delta+\frac{1}{2}\delta^2}{1-\frac{1}{2}\delta}=\frac{1-\frac{1}{2}\delta}{1-\frac{1}{2}\delta}-\frac{1}{2}\delta\cdot\frac{1-\delta}{1-\frac{1}{2}\delta}=$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\delta\left(1 - \frac{\frac{1}{2}\delta}{1 - \frac{1}{2}\delta}\right) = 1 - \frac{\delta}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\delta}{2}\right)^k .$$

Тогда (здесь $p \neq 1$)

$$\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z} \cdot \frac{1+z^2}{1+z} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\delta^k\right)\left(1 + \sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{2^p}\delta^p\right) - \frac{\delta}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^k}{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{k+p=n}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{k+1}\delta^{k+p}\right] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\delta^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{n-p+1} - \frac{1}{2n}\right]\delta^n =: 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\delta^n.$$

Последний степенной ряд сходится при $\delta \in [0, 1)$. Рассмотрим (при $p \neq 1$)

$$\gamma_n = \left[\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{n-p+1}\right] - \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{n-1} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{n-k+1} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n} + \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n-p+1} =$$

$$= \frac{2n-n-1}{2n(n+1)} + \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{n-p+1} =$$

$$= \frac{n-1}{2n(n+1)} + \sum_{p=2}^{n}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{n-p+1} > 0, \qquad n \geqslant 2, \quad \gamma_1 = 0.$$

Итак, при всех $n \geqslant 2$ имееем $\gamma_n > 0$, и следовательно, $\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z} \cdot \frac{1+z^2}{1+z} > 1$ при всех $0 < z < 1$. И значит, можно заключить, что

$\left(2-\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z}\cdot\frac{1+z^2}{1+z}\right)<1$ при всех $z\in(0,1)$. Тогда справедливо неравенство

$$1-\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z}\cdot\frac{2z}{1+z}\left(2-\frac{\ln\frac{1}{z}}{1-z}\cdot\frac{1+z^2}{1+z}\right)\geqslant 0$$

для всех $z\in(0,1)$. Отсюда следует выпуклость вверх функции $y=\ln x\frac{1-\rho^{\frac{1}{x}}}{1+\rho^{\frac{1}{x}}}$ для $x$, $\rho\in(0,1)$. Лемма доказана.

Как следует из доказательства, лемма 5.1.2 верна при $\rho\in(0,1)$ и $x\in(0,\infty)$. Учитывая все приведенное выше, получаем

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}r\left(B_{k,p},a_{k,p}\right)\leqslant(2R)^{2n}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\frac{1-\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant(2R)^{2n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^{2n}\cdot\left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{R}\right)^n}{1+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^n}\right]^{2n}=\left(\frac{4R}{n}\right)^{2n}\left[\frac{R^n-\lambda^n}{R^n+\lambda^n}\right]^{2n}.$$

Утверждение о знаке равенства следует из следствия 5.1.16. Следствие доказано.

Функционал $t_0(A_{n,2})$, определенный на множестве $(n,2)$-лучевых систем точек, можно распространить на принадлежащие единичному кругу $n$-лучевые системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n\subset U$ по следующему правилу:

$$t_0(A_n):=t_0\left(\widehat{A}_{n,2}\right),$$

где $\widehat{A}_{n,2}=\{a_{k,p}\}$, $a_{k,1}:=a_k$, $a_{k,2}:=(\overline{a}_k)^{-1}$, $k=\overline{1,n}$. Очевидно, что если $A_n\subset U_R$, $R\in\mathbb{R}^+$, то $t_0(A_n):=t_0\left(\frac{1}{R}A_n\right)$. Аналогично предыдущему, для любой $n$-лучевой системы точек $A_n=\{a_k\}\subset U_R$ и $0<\lambda<R$ положим

$$A_n(\lambda):=\left\{\frac{a_k}{|a_k|}\lambda\right\}_{k=1}^n.$$

Из определения вытекает, что $A_n(\lambda)\subset U_R$ при всех $\lambda\in(0,R)$. Теперь можно сформулировать результат, являющийся следствием из теоремы 5.1.1 и леммы 5.1.2.

**Следствие 5.1.18.** *Пусть $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, R \in \mathbb{R}^+$, $\lambda < R$. Тогда для любой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, удовлетворяющей условиям $A_n \subset U_R$, $\mathcal{L}(A_n) = \lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R}A_n\right) = t_0\left(\frac{1}{R}A_n(\lambda)\right)$, и произвольной системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B_k \subset U_R$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\frac{4\lambda}{n}\right)^n \cdot \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^n.$$

*Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B}_k$, $k = \overline{1,n}$, являются, соответственно, принадлежащими $U_R$ полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n + R^n)}{(w^n - \lambda^n)^2(R^{2n} - \lambda^n w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap} \widetilde{B}_k \backslash B_k = 0$.

Следствие 5.1.18 существенно усиливает теорему 2.3.9.

***Доказательство.*** Сначала рассмотрим случай $R = 1$, то есть $a_k \in B_k \subset U_1$, $k = \overline{1,n}$. Из равенства (5.1.6) получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (2\lambda)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что $g_k^{(s)} \in G_k^{(s)} \subset U_1$, $G_k^{(1)} \bigcap G_k^{(2)} = \varnothing$, $k = \overline{1,n}$, $s = 1,2$. При каждом $k = \overline{1,n}$ рассмотрим конформный автоморфизм $w = T_k(z)$ плоскости комплексных чисел, при котором мнимая ось и единичный круг преобразуются на себя, причем

$$T_k\left(g_k^{(s)}\right) = (-1)^s \cdot i(\lambda_k)^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}^+,$$

$$T_k\left(G_k^{(s)}\right) =: \Omega_k^{(s)}, \quad k = \overline{1,n},\ s = 1,2.$$

Существование таких автоморфизмов очевидно.

Далее, в силу условий следствия 5.1.18, инвариантности функционала $\left|a_1 - a_2\right|^{-2} r(B_1, a_1)\, r(B_2, a_2)$ и классической теоремы П.П. Куфарева (см. напр. [156, 162]) имеем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant (2\lambda)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, -i\lambda_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, i\lambda_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)}{4\lambda_k^2}\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant (2\lambda)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \prod_{k=1}^{n} \frac{1-\lambda^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\lambda^{\frac{2}{\alpha_k}}} = (2\lambda)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (t_0(A_n))^n =$$

$$= (2\lambda)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot (t_0(A_n(\lambda)))^n = (2\lambda)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \frac{1-\lambda^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\lambda^{\frac{2}{\alpha_k}}} \leqslant$$

$$\leqslant (2\lambda)^n \left(\frac{2}{n}\right)^n \left(\frac{1-\lambda^n}{1+\lambda^n}\right)^n = \left(\frac{4\lambda}{n} \cdot \frac{1-\lambda^n}{1+\lambda^n}\right)^n.$$

Если $R \neq 1$, то полагаем $A'_n = \frac{1}{R} A_n$ и $\{B'_k\}_{k=1}^n$, $B'_k = T_R(B_k)$, $T_R(z) := \frac{1}{R} z$, и получаем соотношение

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B'_k, a'_k\right) \leqslant \left(\frac{4}{n} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1-\left(\frac{\lambda}{R}\right)^n}{1+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^n}\right)^n,$$

которое равносильно искомому неравенству. Случай равенства исследуется аналогично предыдущему. Следствие доказано.

**Следствие 5.1.19.** *Пусть* $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, $R, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\lambda}{R} \in \left(0, \frac{1}{7}\right]$. *Тогда для любой* $(n,2)$*-лучевой системы точек* $A_{n,2} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *такой, что* $\mathcal{L}(A_{n,2}) = R^{2n}$, $\mathcal{L}_1(A_{n,2}) = \lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}\right) = t_0\left(\frac{1}{R} A_{n,2}(\lambda)\right)$, *и произвольной системы взаимно непересекающихся областей* $\{B_{k,p}\}$, $a_{k,p} \in B_{k,p} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{2} r\left(B_{k,p}, a_{k,p}\right) \leqslant (2R)^{2n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^2 \left[\frac{R^n - \lambda^n}{R^n + \lambda^n}\right]^{2n}.$$

*Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда* $a_{k,p}$ *и* $\widetilde{B}_{k,p}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, *являются, соответственно полюсами и* *круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+R^n)^2}{(w^n-\lambda^n)^2(R^{2n}-\lambda^n w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}_{k,p}\backslash B_{k,p} = 0$, $k=\overline{1,n}$, $p=1,2$.

Следствие 5.1.19 усиливает теорему 2.3.10 за счет угловых параметров при значениях $\lambda$, $0<\lambda<\frac{1}{7}R$. Аналогичный результат справедлив для неналегающих областей в круге $U_R$.

**Следствие 5.1.20.** *Пусть* $n\geqslant 3$, $n\in\mathbb{N}$, $R,\lambda\in\mathbb{R}^+$, $\frac{\lambda}{R}\in\left(0,\frac{1}{7}\right]$. *Тогда для любой $n$-лучевой системы точек* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^n$, $A_n\subset U_R$, $\mathcal{L}(A_n)=\lambda^n$, $t_0\left(\frac{1}{R}A_n\right)=t_0\left(\frac{1}{R}A_n(\lambda)\right)$, *и произвольной системы взаимно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=1}^n$, $a_k\in B_k\subset U_R$, $k=\overline{1,n}$, *выполняется неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leqslant (2\lambda)^n\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\left[\frac{R^n-\lambda^n}{R^n+\lambda^n}\right]^n.$$

*Знак равенства здесь достигается тогда и только тогда, когда* $a_k$ *и* $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{1,n}$, *являются, соответственно, принадлежащими* $U_R$ *полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+R^n)^2}{(w^n-\lambda^n)^2(R^{2n}-\lambda^n w^n)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}\widetilde{B}_k\backslash B_k=0$, $k=\overline{1,n}$.

Данный результат усиливает теорему 2.3.9 за счет угловых параметров при $\lambda\in\left(0,\frac{1}{7}\right]$.

### 5.1.6. Задачи первого типа для $(n,2)$-лучевых систем точек и открытых множеств.

При введенных выше обозначениях справедлива

**Теорема 5.1.5**. (Бахтин А.К., Вьюн В.Е. [56]). *Пусть* $n\geqslant 2$. *Тогда, для любой* $(n,2)$*-лучевой системы точек* $A_{n,2}=\{a_{k,p}\}$, $k=\overline{1,n}$, $p=1,\,2$, *такой, что* $L(A_{n,2})=1$, *и для произвольного открытого множества* $D\subset\mathbb{C}$, *удовлетворяющего первое условие неналегания* *относительно заданной $A_{n,2}$, имеет место неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \leqslant \tag{5.1.13}$$

$$\leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right)^2 \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp\{-g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\},$$

*знак равенства в котором достигается, когда точки $a_{k,p}$, $k=\overline{1,n}$, $p=1,2$, и множество $D$ являются, соответственно, полюсами и объединением всех круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^{n-2}(w^n+1)^2}{(w^n-(R^0)^n)^2(1-(R^0)^n w^n)^2}\,dw^2.$$

***Доказательство.*** Из условий, наложенных на множество $D$, следует, что функция $g_D(z,w)$ определена при всех $z, w \in D$ и конечна при всех $z \neq w$. Пусть $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $E(a_{k,p}, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_{k,p}| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $k=\overline{1,n}$, $p=1,2$. Для достаточно малых $\varepsilon$ рассмотрим конденсатор $C(\varepsilon, D, A_{n,2}) = \big\{E_0, E_1(\varepsilon)\big\}$, $E_1(\varepsilon) = \bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{p=1}^{2} E(a_{k,p}, \varepsilon)$, и его емкость

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon, D, A_{n,2}) := \inf \iint \left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right) dxdy,$$

где точная нижняя грань берется по всем вещественным непрерывным, липшицевым на $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $\psi = \psi(z)$ таким, что $\psi\Big|_{E_0} = 0$, $\psi\Big|_{E_1(\varepsilon)} = 1$.

С учетом теоремы 1 работы [111] можем записать асимптотическое равенство

$$\big|C(\varepsilon, D, A_{n,2})\big| = \frac{1}{4\pi n}\log\frac{1}{\varepsilon} + M(D, A_{n,2}) + o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{5.1.14}$$

где величина $M(D, A_{n,2})$ — приведенный модуль множества $D$ относительно системы точек $A_{n,2}$:

$$M(D, A_{n,2}) = \frac{1}{8\pi n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{2}\log r(D, a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p}, a_{q,s})\right). \tag{5.1.15}$$

Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(\varepsilon, D, A_{n,2})$ относительно системы функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$ и системы областей $\{P_k\}_{k=1}^{n}$. Пусть

$$C_k(\varepsilon, D, A_{n,2}) = \left\{E_0^{(k)}, E_1^{(k)}(\varepsilon)\right\},$$

где $E_0^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$, — объединение образа множества $E_0 \bigcap \overline{P}_k$ при отображении $z_k(w)$ с симметричным ему множеством относительно мнимой оси, а $E_1^{(k)}(\varepsilon)$, $k = \overline{1,n}$, — объединение образа множества $E_1(\varepsilon) \bigcap \overline{P}_k$ при том же отображении с симметричным ему множеством относительно мнимой оси. Тогда выполняется основное неравенство метода кусочно–разделяющего преобразования

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon, D, A_{n,2}) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap} C_k(\varepsilon, D, A_{n,2}). \tag{5.1.16}$$

Отсюда непосредственно получаем неравенство, играющее ключевую роль для дальнейших оценок

$$\left|C(\varepsilon, D, A_{n,2})\right| \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{n}\left|C_k(\varepsilon, D, A_{n,2})\right|^{-1}\right)^{-1}. \tag{5.1.17}$$

Пусть $\Omega_{k,p}^{(1)}$, $\Omega_{k,p}^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1, 2$, — те же, что и в доказательстве теоремы 5.1.4, для которых имеют место неравенства (5.1.10) и (5.1.11). Аналогично способу получения асимптотических равенств (5.4.1) и (5.4.2), приходим к соотношениям

$$\left|C_k(\varepsilon, D, A_{n,2})\right| = \frac{1}{8\pi}\log\frac{1}{\varepsilon} + M_k(D, A_{n,2}) + o(1), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{5.1.18}$$

$k=\overline{1,n}$, где величины $M_k(D,A_{n,2})$ при каждом $k=1,2,...,n$ определяются следующим выражением:

$$M_k(D,A_{n,2})=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{16}\sum_{p=1}^{2}\log\frac{r\left(\Omega_{k,p}^{(1)},\omega_{k,p}^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\,\frac{r\left(\Omega_{k,p}^{(2)},\omega_{k,p}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}. \quad (5.1.19)$$

В свою очередь, из (5.4.6) следует

$$\sum_{k=1}^{n}\left|C_k(\varepsilon,D,A_{n,2})\right|^{-1}=\frac{8\pi n}{\log\frac{1}{\varepsilon}}-\left(\frac{8\pi}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}M_k(D,A_{n,2})+$$

$$+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{-2}\right),\quad \varepsilon\to 0.$$

Уже отсюда получаем выражение, дающее асимптотику правой части неравенства (5.1.17), —

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left|C_k(\varepsilon,D,A_{n,2})\right|^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=\left[\frac{8\pi n}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\left(1-\frac{8\pi}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M_k(D,A_{n,2})+o\left(\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^{-1}\right)\right]^{-1}=$$

$$(5.1.20)$$

$$=\frac{1}{8\pi n}\log\frac{1}{\varepsilon}\left(1+\frac{8\pi}{n\log\frac{1}{\varepsilon}}\sum_{k=1}^{n}M_k(D,A_{n,2})+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{8\pi n}\log\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}M_k(D,A_{n,2})+o(1),\quad \varepsilon\to 0.$$

Далее, из неравенства (5.1.17) с учетом (5.4.1) и (5.1.20) следует

$$\frac{1}{4\pi n}\log\frac{1}{\varepsilon}+M(D,A_{n,2})+o(1)\leqslant\frac{1}{4\pi n}\log\frac{1}{\varepsilon}+\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}M_k(D,A_{n,2})+o(1).$$

Сокращаем особенности в последнем неравенстве и устремляем $\varepsilon$ к нулю, получаем в результате неравенство для приведенных модулей

$$M(D, A_{n,2}) \leqslant \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,2}). \qquad (5.1.21)$$

Выражения (5.4.2), (5.1.19) и (5.1.21) приводят к неравенству

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{2} \log r(D, a_{k,p}) + \sum_{(k,p)\neq(q,s)} g_D(a_{k,p}, a_{q,s}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{2}\log\frac{r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}\cdot|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}} + \sum_{p=1}^{2}\log\frac{r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}\cdot|a_{k+1,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right).$$

От последнего неравенства нетрудно перейти к следующему:

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp g_D(a_{k,p}, a_{q,s}) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\frac{r\left(\Gamma_{k,p}^{(1)}, \gamma_{k,p}^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}\cdot|a_{k,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\cdot\frac{r\left(\Gamma_{k,p}^{(2)}, \gamma_{k,p}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}\cdot|a_{k+1,p}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, с учетом рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 5.1.4, получаем неравенство

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D, a_{k,p}) \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp g_D(a_{k,p}, a_{q,s}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\cdot\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2}\chi\left(\left|\frac{a_{k,p}}{a_{k+1,p}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)|a_{k,p}|\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{2}\frac{r\left(\Omega_{k,p}^{(1)}, \omega_{k,p}^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_{k,p}^{(2)}, \omega_{k,p}^{(2)}\right)}{\left|\omega_{k,p}^{(1)}-\omega_{k,p}^{(2)}\right|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, учитывая условие теоремы $L(A_{n,2})=1$, приходим к неравенству

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D,a_{k,p}) \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp g_D(a_{k,p},a_{q,s}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(\prod_{p=1}^{2}\frac{r\left(\Omega^{(1)}_{k,p},\omega^{(1)}_{k,p}\right)\cdot r\left(\Omega^{(2)}_{k,p},\omega^{(2)}_{k,p}\right)}{\left|\omega^{(1)}_{k,p}-\omega^{(2)}_{k,p}\right|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Используя формулу (5.1.11), можем сделать вывод, что

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D,a_{k,p}) \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp g_D(a_{k,p},a_{q,s}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2 \times \tag{5.1.22}$$

$$\times\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{r\left(E^{(1)}_{k,1},-i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right) r\left(E^{(2)}_{k,1},i\rho_k^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)}{4\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{r\left(E^{(1)}_{k,2},-i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}}\right) r\left(E^{(2)}_{k,2},i\rho_k^{-\frac{1}{\alpha_k}}\right)}{4\rho_k^{-\frac{2}{\alpha_k}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наконец, учитывая лемму 5.1.1 и неравенство (5.1.22), получаем соотношение

$$\prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{2} r(D,a_{k,p}) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)^2\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}{1+\rho_k^{\frac{2}{\alpha_k}}}\right)^2 \prod_{(k,p)\neq(q,s)} \exp\{-g_D(a_{k,p},a_{q,s})\}.$$

Утверждение о знаке равенства в неравенстве (5.1.13) проверяется непосредственно. Теорема полностью доказана.

## 5.2 Задачи второго типа для $n$-лучевых систем точек

**5.2.1. Равнолучевые системы точек и оценки функционалов второго типа.** Рассмотрим теперь задачу об оценке функционала

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — $n$-равнолучевая система точек, а $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ — система попарно непересекающихся областей, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$. В данном случае справедлив следующий результат.

**Теорема 5.2.1**. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, $\gamma \leqslant n^2$. Тогда для любой $n$-равнолучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и произвольной системы взаимно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$ справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(B_0^{(0)}, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}),$$

*где $\{a_k^{(0)}\}$ и $B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, — полюсы и соответствующие этим полюсам круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\, dw^2,$$

$$R^{n+\gamma} = \left[\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n^2}} \left[\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right]^{1+\frac{\gamma}{n}}.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_k = a_k^{(0)}$, $\widetilde{B}_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0, n}$, и $\operatorname{cap}(\widetilde{B}_k \backslash B_k) = 0$, $k = \overline{0, n}$.*

***Доказательство.*** Для данной $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ рассмотрим все те же объекты, что и при доказательстве теоремы 5.1.1 и используем формулы (5.1.2) и (5.1.3). Добавим соответствующую (см. [108–110]) формулу для разделяющего преобразования области $B_0$ относительно произвольной $n$-лучевой системы точек $A_n$, $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$, $\{z_k(w)\}_{k=1}^n$, $\{\alpha_k(A_n)\}_{k=1}^n$ (см. п. 2.1.1). Очевидно, что

$$|z_k(w)| = |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \qquad w \to 0,\, w \in \overline{P_k},\, k = \overline{1,n}.$$

Тогда

$$r(B_0, 0) \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[ r\left( G_k^{(0)}, 0 \right) \right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}},$$

где $G_k^{(0)}$ — объединение связной компоненты множества $z_k\left(B_0 \bigcap \overline{P_k}(A_n)\right)$, содержащей начало координат, с его симметричным отражением относительно мнимой оси. Отсюда и из (5.1.3) получаем

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} \left[ r\left( G_k^{(0)}, 0 \right) \right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}\gamma} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left[ \frac{r\left(G_{k-1}^{(2)}, g_{k-1}^{(2)}\right) r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{|a_k|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)}} \times$$

$$\times \left[ \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)},0\right) r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \cdot \left[ \prod_{k=1}^{n} \frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)},0\right) r\left(G_k^{(1)}, g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)}, g_k^{(2)}\right)}{\left(\left|g_k^{(1)}\right|\left|g_k^{(2)}\right|\right)^{\alpha_k^2\gamma} \cdot \left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^{2-\alpha_k^2\gamma}} \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(\left|g_k^{(1)}\right|\left|g_k^{(2)}\right|\right)^{\frac{\alpha_k^2\gamma}{2}} \cdot \left|g_k^{(1)} - g_k^{(2)}\right|^{1-\frac{\alpha_k^2}{2}\gamma}}{|a_k|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\alpha_{k-1}}\right)}} |a_k| =$$

$$= \left( \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right) \cdot \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left[ \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}} \right]^{\frac{\alpha_k^2\gamma}{2}} \cdot \frac{|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}}{|a_k \cdot a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} |a_k| \right\} \times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)},0\right)r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right)r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)}\cdot g_k^{(2)}\right|^{\alpha_k^2\gamma}\cdot\left|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}\right|^{2-\alpha_k^2\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{2}\alpha_k^2}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{\gamma}{4}(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\right]\times$$

$$\times 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)},0\right)r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right)r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left|g_k^{(1)}\cdot g_k^{(2)}\right|^{\alpha_k^2\gamma}\cdot\left|g_k^{(1)}-g_k^{(2)}\right|^{2-\alpha_k^2\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

При каждом $k=\overline{1,n}$ несложно указать конформный автоморфизм $\zeta=T_k(z)$ плоскости комплексных чисел $\overline{\mathbb{C}}$ такой, что $T_k(0)=0$, $T_k\left(g_k^{(s)}\right)=(-1)^s\cdot i$, $\Omega_k^{(q)}:=T_k\left(G_k^{(q)}\right)$, $k=\overline{1,n}$, $s=1,2$, $q=0,1,2$. Инвариантность относительно конформных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$ функционала

$$J_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{r^{\alpha_1}(B_1,a_1)\cdot r^{\alpha_2}(B_2,a_2)\cdot r^{\alpha_3}(B_3,a_3)}{|a_1-a_2|^{\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3}\cdot|a_1-a_3|^{\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3}\cdot|a_2-a_3|^{-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}},$$

$\alpha_k\in\mathbb{R}^+$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $B_k\bigcap B_p=\varnothing$, $k=1,2,3$, $p=1,2,3$, $k\neq p$, по-видимому, впервые указана в работе [141]. С учетом этой инвариантности, получаем

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{\gamma}{2}\alpha_k^2}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{\gamma}{4}(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\right]\times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(1)},-i\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant \qquad (5.2.1)$$

$$\leqslant\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}r^{\alpha_k^2\gamma}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(1)},-i\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \prod\limits_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2} \cdot \prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}$.

Для равнолучевых систем точек из (5.2.1) и [109] (теорема 4), следует соотношение

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)\cdot\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(1)},-i\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \tag{5.2.2}$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)\cdot\left[r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(D_0,0\right)\cdot r\left(D_1,-i\right)\cdot r\left(D_2,i\right)\right]^{\frac{n}{2}},$$

где

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) := \left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n^2}}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{1+\frac{\gamma}{n}},$$

а $D_s$, $s=\overline{0,2}$, — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(\zeta)d\zeta^2 = \frac{(n^2-\gamma)\zeta^2-\gamma}{\zeta^2(\zeta^2+1)^2}\,d\zeta^2. \tag{5.2.3}$$

Ключевая оценка (5.2.2) получена благодаря инвариантности указанного выше функционала $J_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и использованию идей и результатов работы [109]. В случае реализации знака равенства в (5.2.2), аналогично предыдущему (см.теоерему 3.1.1, 5.1.1), нетрудно показать, что $|a_k| = R$, $k=\overline{1,n}$. Более того, преобразование $\zeta = -i\left(\frac{w}{R}\right)^{\frac{n}{2}}$ является накрывающим преобразованием. Поэтому, делая в (5.2.3) замену переменной $\zeta = -i\left(\frac{w}{R}\right)^{\frac{n}{2}}$, получаем квадратичный дифференциал

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+R^n\gamma}{w^2(w^n-R^n)}\,dw^2, \tag{5.2.4}$$

где $R = \left[\prod\limits_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)^{1-\frac{2\gamma}{n^2}}\right]^{\frac{1}{n+\gamma}}\cdot\left[\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{\gamma}{n}}\right]^{\frac{1}{n+\gamma}}$.

Непосредственной проверкой можно показать, что величина $r^{\gamma}(B_0^{(0)},0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k^{(0)},a_k^{(0)})$, где $a_k^{(0)}$, $B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, — полюсы и круговые области (5.2.4), равна правой части неравенства (5.2.2). В случае экстремальной конфигурации, как и ранее, получаем равенство

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)=r^{\gamma}(\widetilde{B}_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(\widetilde{B}_k,a_k).$$

Отсюда сразу заключаем, что

$$r(B_k,a_k)=r(\widetilde{B}_k,a_k),\qquad k=\overline{0,n},\ a_0=0.$$

Последнее приводит нас к выводу о том, что cap $\left(\widetilde{B}_k\backslash B_k\right)=0$, $k=\overline{0,n}$. Теорема доказана.

**Следствие 5.2.1.** *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $\gamma\in\mathbb{R}^+$, $\gamma<n^2$. Тогда для произвольной $n$-равнолучевой системы точек $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ и произвольной системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k\in B_k\subset\overline{\mathbb{C}}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, выполняется неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\cdot\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\cdot\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}\cdot\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n).$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $a_k$ и $\widetilde{B}_k$, $k=\overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+R^n\gamma}{w^2(w^n-R^n)^2}\,dw^2,$$

$$R=\left\{\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n^2}}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{1+\frac{\gamma}{n}}\right\}^{\frac{1}{n+\gamma}},$$

*и* cap $\left(\widetilde{B}_k\backslash B_k\right)=0$, *$k=\overline{0,n}$.*

***Доказательство.*** Из теоремы 4 работы [109] и свойств разделяющего преобразования следует, что в случае, когда $a_k = a_k^{(0)}$ и $B_k = B_k^{(0)}$, $0 < \gamma < n^2$, $k = \overline{0, n}$, выполняется соотношение

$$r^{\gamma}\left(B_0^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)}, a_k^{(0)}\right) =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot R^{n+\gamma}.$$

С учетом того, что $R^{n+\gamma} = \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)$, из теоремы 5.2.1 вытекает необходимое утверждение.

При $\gamma = n^2$ из теоремы 5.2.1 будем иметь следующий результат.

**Следствие 5.2.2.** *Пусть $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой $n$-равнолучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и произвольной системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=0}^{n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, справедливо неравенство*

$$r^{n^2}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant n^{-n} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right]^{-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{n+1}.$$

*Знак равенства реализуется здесь при тех же условиях, что и в теореме 5.2.1.*

Для случая неналегающих областей оценка следствия 5.2.2 усиливает один результат [111].

### 5.2.2. Оценки функционалов второго типа для открытых множеств.

Результат теоремы 5.2.1 можно значительно обобщить за счет расширения систем неналегающих областей до класса всех открытых множеств, удовлетворяющих второму условию неналегания. Докажем следующий результат.

**Теорема 5.2.2**. *Пусть $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$, $\gamma \leqslant n^2$. Тогда для любой $n$-равнолучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ и любого открытого множества $B$, $\{0\}\bigcup A_n \subset B \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего* *второму условию неналегания относительно системы $A_n$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B,0)\prod_{k=1}^{n} r(B,a_k)\cdot\prod_{k=1}^{n}\exp 2\sqrt{\gamma}\,g_B(0,a_k)\cdot\prod_{k\neq p}\exp g_B(a_k,a_p)\leqslant$$

$$\leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

*где* $\{a_k^{(0)}\}$ *и* $B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0^{(0)}=0$, *являются, соответственно, полюсами и соответствующими им круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+R^n\gamma}{w^2(w^n-R^n)}\,dw^2,$$

*где* $R^{n+\gamma}=\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)$.

***Доказательство.*** Отметим, что область $B$ обладает функцией Грина (обобщенной, вообще говоря). По аналогии с доказательством теоремы 3.2.2 для достаточно малых $t\in\mathbb{R}^{+}$ рассмотрим множества

$$E_0=\overline{\mathbb{C}}\backslash B;\qquad \overline{U}_t=\{w\in\mathbb{C}:\ |w|\leqslant t\},$$

$$E_k(t)=\{w\in\mathbb{C}:\ |w-a_k|\leqslant t\},\qquad k=\overline{1,n}.$$

По аналогии с (3.2.8) будем рассматривать конденсатор

$$C(t,B,A_n)=\left\{E_0,\,\overline{U}_t,\,E_1(t),\ldots,E_n(t)\right\},$$

с предписанными значениями $0,\sqrt{\gamma},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n\text{ раз}}$. Емкостью конденсатора $C(t,B,A_n)$ называется величина (см. [112, 229])

$$\operatorname{cap}C(t,B,A_n)=\inf\iint\left[(G'_x)^2+(G'_y)^2\right]\,dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G(z)$ таких, что $G=0$ в окрестности множества $E_0$, $G\Big|_{\overline{U}_t}=\sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_k(t)}=1$, $k=\overline{1,n}$. Модуль конденсатора $|C(t,B,A_n)|$ определяется соотношением (3.2.9). Из теоремы 1 [111] определим асимптотику модуля $C(t,B,A_n)$, аналогичную формуле (3.2.14), а именно:

$$|C(t,B,A_n)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\gamma+n}\log\frac{1}{t} + M(B,A_n) + o(1), \qquad t \to 0, \tag{5.2.5}$$

где

$$M(B,A_n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\gamma+n}\right)^2 \left[\gamma\log r(B,0) + \sum_{k=1}^{n}\log r(B,a_k) + \right. \tag{5.2.6}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{\gamma}g_B(a_k,0) + \sum_{k\neq p} g_B(a_p,a_k)\right].$$

Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(t,B,A_n)$ относительно семейства углов $\left\{P_k^{(0)}(A_n)\right\}_{k=1}^{n}$ и семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$, где $z_k(w) = (-1)^k i w^{\frac{n}{2}}$, $k = \overline{1,n}$. Определим конденсаторы (при малых $t$)

$$C_k(t) = \left(E_0^{(k)}, \overline{U}_t^{(k)}, E_1^{(k)}, E_2^{(k)}\right),$$

где

$$E_0^{(k)} = z_k\left(E_0 \bigcap \overline{P}_k^0\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_0 \bigcap \overline{P}_k^0\right)\right\}^+,$$

$$U_t^{(k)} = z_k\left(\overline{U}_t \bigcap \overline{P}_k^0\right) \bigcup \left\{z_k\left(\overline{U}_t \bigcap \overline{P}_k^0\right)\right\}^+,$$

$$E_1^{(k)} = z_k\left(E_k(t) \bigcap \overline{P}_k^0\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_k(t) \bigcap \overline{P}_k^0\right)\right\}^+,$$

$$E_2^{(k)} = z_k\left(E_{k+1}(t) \bigcap \overline{P}_k^0\right) \bigcup \left\{z_k\left(E_{k+1}(t) \bigcap \overline{P}_k^0\right)\right\}^+,$$

$$k = \overline{1,n}, \quad E_{n+1}(t) = E_1(t), \qquad \{A\}^+ = \{w \in \overline{\mathbb{C}} :\, -\overline{w} \in A\}.$$

С каждым конденсатором $C_k(t)$ сопоставим класс $V_k$ — всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0^{(k)}$, $G\Big|_{\overline{U}_t^{(k)}} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_p^{(k)}} = 1$, $k = \overline{1,n}$, $p = 1,2$. При разделяющем преобразовании конденсатору $C(t,B,A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t)\}_{k=1}^{n}$, причем в силу работ [108–112] справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} C(t,B,A_n) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cap} C_k(t). \tag{5.2.7}$$

Непосредственно из (5.2.7) получаем соотношение

$$|C(t,B,A_n)| \leqslant 2\left(\sum_{l=1}^{n} |C_k(t)|^{-1}\right)^{-1}. \tag{5.2.8}$$

Аналогичные (5.2.5) и (5.2.6) справедливы и асимптотические представления (см. [111])

$$|C_k(t)| = \tag{5.2.9}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\frac{2}{n}\gamma + 2}\log\frac{1}{t} + M_k + o(1), \qquad t \to 0,$$

где

$$M_k = \tag{5.2.10}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n}{2\gamma + 2n}\right)^2\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 \gamma \log r\left(B_0^{(k)}, 0\right) + \sum_{s=1}^{2}\log\frac{r\left(B_k^{(s)}, b_k^{(s)}\right)}{\lambda_k^{(s)}}\right],$$

$$z_k(a_k) =: b_k^{(1)},\ z_k(a_{k+1}) =: b_k^{(2)},\ k = \overline{1,n},\ a_{n+1} = a_1,$$

$B_k^{(s)}$ — объединение связной компоненты множества $z_k\left(B\bigcap\overline{P}_k^{(0)}\right)$, содержащей $b_k^{(s)}$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси, $\lambda_k^{(1)} = \frac{n}{2}|a_k|^{\frac{n}{2}-1}$, $\lambda_k^{(2)} = \frac{n}{2}|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}-1}$, $k = \overline{1,n}$. Вычислим асимптотику правой части неравенства (5.2.8). Для этого, полагая, что $t \to 0$, запишем следующее соотношение:

$$|C_k(t)|^{-1} =$$

$$= \frac{2\pi(2\gamma+2n)}{n}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\left(1+\frac{2\pi(2\gamma+2n)}{n}\cdot M_k\frac{1}{\log\frac{1}{t}}+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=$$

$$= \frac{2\pi(2\gamma+2n)}{n}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{t}}-\left[\frac{2\pi(2\gamma+2n)}{n}\right]^2\cdot M_k\cdot\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}+o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{l=1}^{n}|C_k(t)|^{-1}=$$

$$=4\pi(\gamma+n)\frac{1}{\log\frac{1}{t}}-\left[\frac{4\pi(\gamma+n)}{n}\right]^2\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\sum_{l=1}^{n}M_k+o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right).$$

Тогда

$$\left(\sum_{l=1}^{n}|C_k(t)|^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi(\gamma+n)}\left[1-\frac{4\pi(\gamma+n)}{n^2}\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\sum_{l=1}^{n}M_k+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right]^{-1}=$$

$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi(\gamma+n)}+\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}M_k+o(1).$$

Из (5.2.5) – (5.2.8) вытекает соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\gamma+n)}\log\frac{1}{t}+M(B,A_n)+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\gamma+n}\log\frac{1}{t}+\frac{2}{n^2}\sum_{l=1}^{n}M_k+o(1).$$

Последнее означает, что

$$M(B,A_n)\leqslant\frac{2}{n^2}\sum_{l=1}^{n}M_k. \qquad (5.2.11)$$

Используя (5.2.5) – (5.2.11), приходим к соотношению

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\gamma+n)^2}\left[\log r^{\gamma}(B,0)\prod_{k=1}^{n}r(B,a_k)\times\right.$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \exp 2\sqrt{\gamma}\, g_B(a_k,0) \prod_{k\neq p} \exp g_B(a_k,a_p)\Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{n^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{(\gamma+n)^2}\log\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(B_0^{(k)},0\right)\frac{r\left(B_k^{(1)},b_k^{(1)}\right) r\left(B_k^{(2)},b_k^{(2)}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)^2|a_k\,a_{k+1}|^{\frac{n}{2}-1}}.$$

Отсюда будем иметь соотношение

$$r^{\gamma}(B,0)\prod_{k=1}^{n} r(B,a_k)\prod_{k=1}^{n}\exp 2\sqrt{\gamma}\, g_B(a_k,0)\prod_{k\neq p}\exp g_B(a_k,a_p) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\frac{4\gamma}{n^2}}\left(B_0^{(k)},0\right) r\left(B_k^{(1)},b_k^{(1)}\right) r\left(B_k^{(2)},b_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|^2}{|a_k\,a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

С этого момента остается только повторить рассуждения, проводимые при получении неравенств (5.2.1) и (5.2.2). Окончательно получаем

$$r^{\gamma}(B,0)\prod_{k=1}^{n} r(B,a_k)\prod_{k=1}^{n}\exp 2\sqrt{\gamma}\, g_B(a_k,0)\prod_{k\neq p}\exp g_B(a_k,a_p) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{n}\left[\prod_{k=1}^{n}\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n^2}}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|\right]^{1+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times\left[r^{\frac{4\gamma}{n^2}}(D_0,0)\, r(D_1,-i)\, r(D_2,i)\right]^{\frac{n}{2}} = r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

где круговые области $D_p$, $p=\overline{0,2}$, $B_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, и полюсы $a_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, определены при установлении соотношений (5.2.1) и (5.2.2). Таким образом, равенство в неравенстве теоремы 5.2.2 достигается, например, для открытого множества $B^{(0)}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k^{(0)}$ и системы $A_n^{(0)}=\{a_k^{(0)}\}_{k=1}^{n}\bigcup\{0\}$. Теорема доказана.

**Следствие 5.2.3.** *Пусть $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любой $n$-равнолучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и произвольного открытого множества $B$, $\{0\} \bigcup A_n \subset B \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего второму условию неналегания, выполняется неравенство*

$$r^{n^2}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B, a_k) \leqslant n^{-n} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)\right]^{-1} \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right]^{n+1}.$$

*Знак равенства достигается для $B^{(0)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k^{(0)}$ и $A_n^{(0)} = \{a_k^{(0)}\}_{k=1}^n$, указанных в теореме 5.2.2.*

Следствие 5.2.3 для класса открытых множеств, удовлетворяющих второму условию неналегания, усиливает оценку, полученную в [111].

**Замечание 5.2.1.** Метод доказательства теоремы 5.2.2 допускает рассмотрение случая $n = 1$ и при этом получаем некоторое обобщение теоремы М.А. Лаврентьева [158].

Метод доказательства теоремы 5.2.1 и 5.2.2 позволяет также получить результат, усиливающий теорему 4 [111].

**5.2.3. Экстремальные задачи второго типа для произвольных $n$-лучевых систем точек.** В работе [110] в списке нерешенных задач под номером 9.2 рассмотрена следующая задача:

Показать, что максимум произведения

$$r^{\alpha}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где $B_0$, $B_1$, ..., $B_n$, $n \geqslant 2$, — попарно непересекающиеся области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ и $\alpha \leqslant n$, достигается для некоторой конфигурации из областей $B_k$ и точек $a_k$, обладающей $n$-кратной симметрией.

При $\alpha = 1$ эта задача полностью решена в работе [109] (см. также [110–112]). Из метода этой работы следует, что этот же результат справедлив и при $0 < \alpha < 1$.

Идеи и методы работы [109] дополним таким образом, чтобы получить новое продвижение в изучении вышеупомянутой задачи. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 5.2.3**. (А.К. Бахтин [40]). *Для произвольного* $\gamma \in \mathbb{R}^+$ *существует такое* $n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$, *что при каждом* $n \geqslant n_0(\gamma)$ *выполняется неравенство*

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant r^\gamma\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right) \qquad (5.2.12)$$

*для любой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_1 = 1$, *и любой системы попарно непересекающихся областей* $\{B_k\}_{k=0}^n$, $0 \in B_0$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$. *Знак равенства в (5.2.12) достигается тогда и только тогда, когда* $a_k = a_k^{(0)}$, $\widetilde{B}_k = B_k^{(0)}$, $k = \overline{0,n}$, $a_0 = 0$, *где* $a_k^{(0)}$ *и* $B_k^{(0)}$ *являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2,$$

*и* $\operatorname{cap}(\widetilde{B}_k\backslash B_k) = 0$, $k = \overline{0,n}$.

Очевидно, что теорема 5.2.3 существенно дополняет результат работы [109].

***Доказательство.*** Для $\gamma \in (0,1]$ теорема 5.2.3 справедлива в силу работы [109]. Рассмотрим случай $\gamma > 1$. Применяя, как и в [109], разделяющее преобразование к семейству областей $\{B_k\}_{k=0}^n$ относительно системы углов $\{P_k(A_n)\}_{k=1}^n$, определяемой системой точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и системы функций $z_k = -i\left(e^{-i\arg a_n}z\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$, получаем неравенство

$$J_\gamma = r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} \alpha_k^2 r^{\gamma\alpha_k^2}\left(B_0^{(k)},0\right) r\left(B_k^{(1)},-i\right) r\left(B_k^{(2)},i\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} \alpha_k^2 r^{\gamma\alpha_k^2}\left(D_0,0\right) r\left(D_1,-i\right) r\left(D_2,i\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $D_k$, $k=0,1,2,$ — круговые области квадратичного дифференциала (5.2.3). Далее,

$$J_\gamma \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[ \prod_{k=1}^{n} 2^{t_k^2+6} \cdot t_k^{t_k^2+2} \cdot (2-t_k)^{-\frac{1}{2}(2-t_k)^2} \cdot (2+t_k)^{-\frac{1}{2}(2+t_k)^2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

где $t_k = \sqrt{\gamma}\,\alpha_k$, $k=\overline{1,n}$. В последней оценке используем результат, полученный в работе [109] при доказательстве теоремы 4, что приводит нас к следующему неравенству:

$$r^{\sigma^2}(B_0,0)\, r(B_1,-i)\, r(B_2,i) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2},$$

где $B_k$, $k=\overline{0,2}$, — произвольные взаимно непересекающиеся области, $0\in B_0$, $-i\in B_1$, $i\in B_2$, $\sigma\in(0,2]$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$r^\gamma(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[r(B_0,0)r(B_k,a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant$$
$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n}|a_k|^2\right]^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot\mathcal{L}^0(A_n)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant \left[2^n\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant$$
$$\leqslant \left[2^n\alpha_0\left(\frac{2-\alpha_0}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}} = \left[2^n\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

где $\alpha_0=\max\limits_k \alpha_k$, причем $2-\alpha_0\leqslant 2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, $\alpha_0\geqslant\frac{2}{n}$. С другой стороны, из результатов работы [109] и свойств разделяющего преобразования, получаем

$$J_n^0(\gamma) = r^\gamma(D_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k) =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \left[\frac{2^{\frac{4\gamma}{n^2}+6}\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{4\gamma}{n^2}}}{\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2-\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{2}\left(2+\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2}}\right]^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}} \cdot \gamma^{\frac{\gamma}{n}} \cdot n^n}{(n^2-\gamma)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

где $D_k$, $d_k$, $k=\overline{0,n}$, $d_0=0$, — соответственно круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Оценим теперь величину

$$\frac{r^{\gamma}(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{r^{\gamma}(D_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k,d_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left[2\cdot 2^{n-1}\cdot\alpha_0(2-\alpha_0)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[2\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\cdot\left(\frac{2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}{2}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}}\cdot O(1) =$$

$$= \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1}\cdot\left[\frac{2-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}{2}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}\cdot O(1),$$

где

$$O(1) = \left(\frac{n^2}{4\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}\times$$

$$\times\left(\frac{n}{4}\right)^{-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}}\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}},$$

причем для $n$ достаточно больших можно считать, что $O(1) < 10\,e$. Очевидно, что

$$O(1) = \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \times$$

$$\times \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

Далее, введем обозначение:

$$J_n(\gamma) = \frac{r^{\gamma}(B_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)}{r^{\gamma}(D_0,0)\prod\limits_{k=1}^{n} r(D_k,d_k)},$$

и с учетом всех предыдущих рассуждений можем записать:

$$J_n(\gamma) \leqslant 10e\left(\frac{n}{4}\right)^{\gamma+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}$$

при любом фиксированном $\gamma \in \mathbb{R}^+$ и больших $n$ (например, $n \geqslant 10\gamma$). Отсюда следует, что при $n \to \infty$ $J_n(\gamma) \to 0$. Таким образом, существует такое $n_0(\gamma)$, что $J_n(\gamma) < 1$ при всех $n \geqslant n_0(\gamma)$ и при всех $\alpha_0$ таких, что $2 - \alpha_0 \leqslant 2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Это означает, что при $n \geqslant n_0(\gamma)$ и $2 > \alpha_0 \geqslant \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ для произвольных систем попарно непересекающихся областей и любых наборов различных точек $a_k$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_k \in B_k$, $0 \in B_0$, имеет место строгое неравенство:

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) < r^{\gamma}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k).$$

Наконец, остается получить оценку при $2 - \alpha_0 > 2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. В этом случае выполняется условие $\alpha_0 < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, которое равносильно условию $\gamma\alpha_0^2 < 1$. Ввиду того, что $\alpha_0 \geqslant \alpha_k$, $k = \overline{1,n}$, последнее неравенство влечет соотношение $\gamma\alpha_k^2 < 1$, $k = \overline{1,n}$, которое обеспечивает условия для применения метода из работы [109], при доказательстве теоремы 4. Таким образом, используя вогнутость функции

$$y(x)=\log 2^{x^2+6}x^{x^2+2}(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{\frac{1}{2}(2+x)^2}$$

при $x\leqslant 1$, из приведенных в начале пункта оценок, получаем неравенство

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant r^{\gamma}(D_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(D_k,d_k)$$

при фиксированных $\gamma\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant n(\gamma)$. Вопрос достижимости знака равенства рассматривается стандартным путем. Теорема доказана.

Можно доказать и значительно более сильный результат.

**Теорема 5.2.4**. *Для любых $\beta,\gamma\in\mathbb{R}^+$ существует номер $n(\gamma,\beta)\in\mathbb{N}$ такой, что при каждом $n\geqslant n(\gamma,\beta)$, $n\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leqslant r^{\gamma}\left(B_0^{(0)},0\right)\prod_{k=1}^{n}r\left(B_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

*где $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ — любая $n$-лучевая система точек такая, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)=1$, $\mathcal{L}^{(0)}(A_n)\leqslant\beta$ и $A_n\subset U_\beta$, $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ — произвольная система попарно непересекающихся областей, $a_k\in B_k$, $k=\overline{0,n}$, $a_0=0$, а $B_k^{(0)}$, $a_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n}$, $a_0^{(0)}=0$, — круговые области и полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2=-\frac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

***Доказательство.*** Рассмотрим величину

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)=\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}=$$

$$=\mathcal{L}(A_n)\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|^{\frac{1}{4}(\alpha_k+\alpha_{k-1})}}{\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{\frac{1}{2}\alpha_k^2}}\right]^{\gamma}.$$

Далее, заметим, что при ограничении $|a_k| \leqslant \beta$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ отсюда вытекает соотношение

$$\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) \leqslant \mathcal{L}(A_n) \cdot \left[ \frac{\beta^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k}}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left[ \chi\left( \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{1}{2\alpha_k}} \right) \right]^{\frac{1}{2}\alpha_k^2}} \right]^{\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{L}(A_n) \cdot \beta^{\gamma} = \beta^{\gamma+1}.$$

С другой стороны, имеет место цепочка неравенств

$$r^{\gamma}(B_0,0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) = \prod_{k=1}^{n} \left( r(B_0,0) r(B_k,a_k) \right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left[ \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[ \prod_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right]^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left[ 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \right]^{1-\frac{\gamma}{n}} = \prod_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n}} \cdot \left[ 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \beta \right]^{1-\frac{\gamma}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \beta^{2\gamma} \cdot \left[ 2^n \alpha_0 \left( \frac{2-\alpha_0}{n-1} \right)^{n-1} \right]^{1-\frac{\gamma}{n}},$$

где $\alpha_0 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \alpha_k$ и $2 - \alpha_0 \leqslant 2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Аналогично доказательству теоремы 5.2.3 получаем, что при достаточно больших $n$ величина $J(\gamma) < 1$. Следовательно, остается рассмотреть только случай $n \geqslant n(\gamma, \beta)$ и $2 - \alpha_0 > 2 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Но в этом случае доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в теореме 5.2.3. Теорема доказана.

## 5.3 Экстремальные задачи третьего типа

**5.3.1. Оценка функционалов третьего типа для неналегающих областей.** В этом разделе объектом нашего исследования будет оценка функционала

$$J = [r(D,0) r(D,\infty)]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(D,a_k)$$

на некоторых классах открытых множеств $D$, $\{0,\infty\} \cup A_n \subset D \subset \mathbb{C}$, где $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ — равноугольная система точек, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$ и

$\gamma \in \mathbb{R}^{+}$ — фиксированные числа. В случае, когда $D$ есть объединение неналегающих областей $B_0$, $B_k$, $B_\infty$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$, сформулируем следующий результат.

**Теорема 5.3.1**. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$. Тогда для произвольной равноугольной $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\prod\limits_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)|a_k| = 1$, и любой системы попарно непересекающихся областей $B_0$, $B_k$, $B_\infty$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant [r(D_0,0)r(D_\infty,\infty)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n} r(D_k,d_k),$$

*знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только когда, когда $a_k = d_k$, $\widetilde{B}_k = D_k$,$k = \overline{1,n}$, где $d_k$ и $D_k$, $k = \overline{1,n}$, есть, соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2 - 2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2,$$

*причем* $\operatorname{cap}(\widetilde{B}_k \setminus B_k) = 0$, $k = \overline{1,n}.$

***Доказательство.*** Рассуждения аналогичны приведенным в п. 5.1.1 и в п. 5.2.1. Используя формулы (5.1.3), (5.1.4) и учитывая равноугольность системы точек $A_n$, получаем соотношения

$$r(B_0,0) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(0)},0\right)\right]^{\frac{2}{n^2}}, \qquad r(B_\infty,\infty) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{2}{n^2}},$$

$$r(B_k,a_k) \leqslant \left[\frac{r\left(G_{k-1}^{(2)},g_{k-1}^{(2)}\right)\cdot r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)^2|a_k|^{n-2}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Здесь $G_k^{(0)}$, $G_k^{(2)}$, $G_k^{(1)}$, $g_k^{(2)}$, $g_k'$ определены в пп. 5.1.1, 5.2.1, а $G_k^{(\infty)}$ обозначает объединение связной компоненты множества $z_k\left(B_\infty \cap \overline{P}_k(A_n)\right)$, содержащей $z = \infty$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси, $k = \overline{1,n}$. Отсюда непосредственно следует цепочка неравенств, во многом аналогичная рассмотренным ранее случаям, а именно,

$$[r(B_0,0)r(B_\infty,\infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left[ r\left(G_k^{(0)},0\right) r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{4\gamma}{n^2}} \cdot \frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)^2 (|a_k||a_{k+1}|)^{\frac{n-2}{2}}} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{|a_k|^{\frac{n}{2}} + |a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}}{(|a_k||a_{k+1}|)^{\frac{n}{4}}} |a_k| \times$$

$$\times \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{n}{2}} + |a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}\right)^2} \left[ r\left(G_k^{(0)},0\right) r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{4\gamma}{n^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \prod_{k=1}^{n} \chi\left( \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|^{\frac{n}{4}} \right) |a_k| \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} I_4^{(k)}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \left( \prod_{k=1}^{n} I_4^{(k)}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$I_4^{(k)}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right) = \left[ r\left(G_k^{(0)},0\right) r\left(G_k^{(\infty)},\infty\right)\right]^{\frac{4\gamma}{n^2}} \frac{r\left(G_k^{(1)},g_k^{(1)}\right) r\left(G_k^{(2)},g_k^{(2)}\right)}{\left| g_k^{(2)} - g_k^{(1)} \right|^2},$$

$$\left| g_k^{(2)} - g_k^{(1)} \right| = |a_k|^{\frac{n}{2}} + |a_{k+1}|^{\frac{n}{2}}, \quad k = \overline{1,n}.$$

На основании теоремы 4.1.1., следствия 4.1.3 и инвариантности функционала

$$\left(\frac{r(B_1,a_1)r(B_3,a_3)}{|a_1-a_3|^2}\right)^\gamma \left(\frac{r(B_2,a_2)r(B_4,a_4)}{|a_2-a_4|^2}\right)$$

приходим к неравенству

$$I_4^{(k)}(\gamma) \leqslant I_4^0\left(\frac{4\gamma}{n^2}, 1\right), \qquad k = \overline{1,n},$$

где величина $I_4^0(\alpha_1, \alpha_2)$ определена в пункте 4.1.1. Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $\widetilde{G}_k^{(0)}$, $\widetilde{G}_k^{(\infty)}$, $\widetilde{G}_k^{(2)}$, $\widetilde{G}_k^{(1)}$ и $0$, $\infty$, $g_k^{(2)}$, $g_k^{(1)}$ являются, соответственно, круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{w^4 + (2-4\gamma)\rho^2 w^2 + \rho^4}{w^2(w^2+\rho^2)^2} dw^2,$$

и $\operatorname{cap}(\widetilde{G}_k^{(q)} \backslash G_k^{(q)}) = 0$, $k = \overline{1,n}$, $q \in \{0, 1, 2, \infty\}$, $\rho \in \mathbb{R}^+$. Таким образом, окончательно исходное неравенство приобретает вид:

$$[r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \left[I_4^{(0)}\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)\right]^{\frac{n}{2}} =$$

$$= [r(D_0, 0) r(D_\infty, \infty)]^\gamma \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, d_k).$$

Отсюда следуют все утверждения теоремы 4.1.1.

Используя лемму 4.1.2 и следствие 4.1.3, можно вычислить правую часть оценки, полученной в теореме 5.3.1.

**Следствие 5.3.1.** *При условиях теоремы 5.3.1 выполняется неравенство*

$$[r(B_0, 0) r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \left[\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)}}{\left|\frac{2\sqrt{\gamma}}{n} - 1\right|^{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}-1\right)^2} \left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n} + 1\right)^{\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}+1\right)^2}}\right]^{\frac{n}{2}}.$$

*Равенство здесь достигается при выполнении условий теоремы 5.3.1.*

### 5.3.2. Открытые множества и задачи третьего типа.

**Теорема 5.3.2**. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$. *Тогда для произвольной* $n$*-равнолучевой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ *такой, что* $\prod\limits_{k=1}^{n} \chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{n}{4}}\right)|a_k| = 1$, *и любого открытого множества* $D$, $\{0,\infty\}\bigcup A_n \subset D \subset \overline{\mathbb{C}}$, *удовлетворяющего третьему условию неналегания, справедливо неравенство*

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k)\cdot\{\exp 2\gamma\, g_D(0,\infty)\times$$

$$\left.\times\prod_{k=1}^{n}\exp 2\sqrt{\gamma}\,(g_D(0,a_k)+g_D(\infty,a_k))\cdot\prod_{k\neq p}\exp g_D(a_k,a_p)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left[r\left(D_0^{(0)},0\right)r\left(D_{n+1}^{(0)},\infty\right)\right]^{\gamma}\cdot\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)},a_k^{(0)}\right).$$

*Равенство здесь достигается для* $D^{(0)} = \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} D_k^{(0)}$ *и* $A_n^{(0)} = \left\{a_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$, *где* $\left\{D_k^{(0)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *— круговые области, а* $A_n^{(0)} = \left\{a_k^{(0)}\right\}\bigcup\{0,\infty\}$ *— полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n}+(n^2-2\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2,$$

*причем* $0 \in D_0^{(0)}$, $\infty \in D_{n+1}^{(0)}$, $a_k^{(0)} \in D_k^{(0)}$.

***Доказательство.*** В силу того, что область $D$ удовлетворяет третье условие неналегания, она обладает функцией Грина (обобщенной, вообще говоря) $g_D(z,a)$ $\forall a \in D$. По аналогии с доказательством теоремы 3.3.2 для достаточно малых $t \in \mathbb{R}^{+}$ вначале образуем множества

$$E_0 = \overline{\mathbb{C}}\backslash D; \qquad \overline{U}_t = \{w \in \mathbb{C}:\, |w| \leqslant t\},$$

$$\Delta_t = \left\{w \in \mathbb{C}:\, |w| \geqslant \frac{1}{t}\right\},$$

$$E_k(t) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a_k| \leqslant t\}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Далее, аналогично (3.3.17) — рассматриваем конденсатор

$$C(t, D, A_n) = \left\{E_0, \overline{U}_t, \, \Delta_t, \, E_1(t), \ldots, E_n(t)\right\},$$

с предписанными значениями $0, \sqrt{\gamma}, \sqrt{\gamma}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ раз}}$. Емкостью конденсатора $C(t, D, A_n)$ называем величину (см. [112, 229])

$$\operatorname{cap} C(t, D, A_n) = \inf \iint \left[(G'_x)^2 + (G'_y)^2\right] dxdy,$$

где нижняя грань берется по множеству всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G = G(z)$ таких, что $G = 0$ в окрестности множества $E_0$, $G\Big|_{\overline{U}_t} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{\Delta_t} = \sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_k(t)} = 1$, $k = \overline{1,n}$. Модуль конденсатора $|C(t, D, A_n)|$ определяется выражением

$$|C(t, D, A_n)| = \left[\operatorname{cap} C(t, D, A_n)\right]^{-1}.$$

По теореме 1 [111], аналогично (3.3.24) определяем асимптотику модуля конденсатора $C(t, D, A_n)$

$$|C(t, D, A_n)| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2\gamma + n} \log \frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1), \qquad t \to 0, \quad (5.3.1)$$

где

$$M(D, A_n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(2\gamma + n)^2} \left[\gamma \log r(D, 0) + \sum_{k=1}^{n} \log r(D, a_k) + 2\gamma g_D(0, \infty) + \right.$$

$$(5.3.2)$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} 2\sqrt{\gamma} \left(g_D(0, a_k) + g_D(\infty, a_k)\right) + \sum_{k \neq p} g_B(a_p, a_k)\right].$$

Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(t, D, A_n)$ относительно семейства углов $\left\{P_k^{(0)}(A_n)\right\}_{k=1}^{n}$ и семейства функций $\{z_k(w)\}_{k=1}^{n}$, где $z_k(w) = (-1)^k i w^{\frac{n}{2}}$, $k = \overline{1,n}$. Рассмотрим конденсаторы при достаточно малых $t \in \mathbb{R}^+$

$$C_k(t, D, A_n) = \left(E_0^{(k)}, \overline{U}_t^{(k)}, \, \Delta_t^{(k)}, \, E_1^{(k)}, E_2^{(k)}\right),$$

где

$$E_0^{(k)} = z_k\left(E_0\bigcap\overline{P}_k^0\right)\bigcup\left\{z_k\left(E_0\bigcap\overline{P}_k^0\right)\right\}^*,$$

$$U_t^{(k)} = z_k\left(\overline{U}_t\bigcap\overline{P}_k^0\right)\bigcup\left\{z_k\left(\overline{U}_t\bigcap\overline{P}_k^0\right)\right\}^*,$$

$$\Delta_t^{(k)} = z_k\left(\Delta_t\bigcap\overline{P}_k^0\right)\bigcup\left\{z_k\left(\Delta_t\bigcap\overline{P}_k^0\right)\right\}^*,$$

$$E_1^{(k)} = z_k\left(E_k(t)\bigcap\overline{P}_k^0\right)\bigcup\left\{z_k\left(E_k(t)\bigcap\overline{P}_k^0\right)\right\}^*,$$

$$E_2^{(k)} = z_k\left(E_{k+1}(t)\bigcap\overline{P}_k^0\right)\bigcup\left\{z_k\left(E_{k+1}(t)\bigcap\overline{P}_k^0\right)\right\}^*,$$

$$k=\overline{1,n},\quad E_{n+1}(t)=E_1(t),\qquad \{A\}^*=\{w\in\overline{\mathbb{C}}:\,-\overline{w}\in A\}.$$

С каждым конденсатором $C_k(t,D,A_n)$ сопоставим класс $V_k$ — всех вещественных, непрерывных и липшицевых в $\overline{\mathbb{C}}$ функций $G=G(z)$ таких, что $G=0$ в окрестности множества $E_0^{(k)}$, $G\Big|_{\overline{U}_t^{(k)}}=\sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{\Delta_t^{(k)}}=\sqrt{\gamma}$, $G\Big|_{E_p^{(k)}}=1$, $k=\overline{1,n}$, $p=1,2$. При разделяющем преобразовании конденсатору $C(t,D,A_n)$ соответствует набор конденсаторов $\{C_k(t,D,A_n)\}_{k=1}^n$, причем в силу полученных В.Н. дубининым результатов [108–110], справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} C(t,D,A_n)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cap} C_k(t,D,A_n).\tag{5.3.3}$$

Отсюда непосредственно следует соотношение

$$|C(t,D,A_n)|\leqslant 2\left(\sum_{l=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}\right)^{-1}.\tag{5.3.4}$$

Аналогично (5.3.1) и (5.3.2) получаем асимптотические представления (см. [111])

$$|C_k(t,D,A_n)|=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{n+2}\log\frac{1}{t}+M_k(D,A_n)+o(1),\qquad t\to 0,\tag{5.3.5}$$

где

$$M_k(D,A_n)=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{(n+2)^2}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^2\gamma\log\left(r\left(D_0^{(k)},0\right)r\left(D_{n+1}^{(k)},\infty\right)\right)+\right. \tag{5.3.6}$$

$$\left.+\log\frac{r\left(D_k^{(1)},a_k^{(1)}\right)\cdot r\left(D_k^{(2)},a_k^{(2)}\right)}{\frac{n}{2}|a_k|^{\frac{n}{2}-1}\cdot\frac{n}{2}|a_{k+1}|^{\frac{n}{2}-1}}\right],$$

$$z_k(a_k) =: a_k^{(1)},\ z_k(a_{k+1}) =: a_k^{(2)},\ a_{n+1}=a_1,\ k=\overline{1,n},$$

$D_k^{(s)}$, $k=\overline{1,n}$, $s=1,2$, — объединение связной компоненты множества $z_k\left(D\bigcap\overline{P}_k^{(0)}\right)$, содержащей $a_k^{(s)}$, с ее симметричным отражением относительно мнимой оси.

Вычислим асимптотику правой части неравенства (5.3.3). Для этого в соответствии с (5.3.5) запишем (при $t\to 0$)

$$|C_k(t,D,A_n)|^{-1}=$$

$$=4\pi\cdot\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\left(1+\frac{4\pi}{\log\frac{1}{t}}M_k(D,A_n)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}=$$

$$=\frac{4\pi}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{4\pi}{\log^2\frac{1}{t}}\right)^2\cdot M_k(D,A_n)+o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}=$$

$$=\frac{4\pi n}{\log\frac{1}{t}}-\left(\frac{4\pi}{\log\frac{1}{t}}\right)^2\sum_{k=1}^{n}M_k(D,A_n)+o\left(\frac{1}{\log^2\frac{1}{t}}\right).$$

Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|C_k(t,D,A_n)|^{-1}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\log\frac{1}{t}}{4\pi n}\left(1-\frac{4\pi}{n\log\frac{1}{t}}\sum_{k=1}^{n}M_k(D,A_n)+o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{t}}\right)\right)^{-1}= \tag{5.3.7}$$

$$= \frac{1}{4\pi n} \log \frac{1}{t} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_n) + o(1).$$

Из соотношений (5.3.1), (5.3.4), (5.3.7) вытекает

$$\frac{1}{4\pi n} \cdot \log \frac{1}{t} + M(D, A_n) + o(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi n} \cdot \log \frac{1}{t} + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_n) + o(1).$$

Но последнее означает, что

$$M(D, A_n) \leqslant \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_n). \qquad (5.3.8)$$

Учитывая (5.3.2), (5.3.6), получаем

$$\Bigg[ \log\left[r(D,0) r(D,\infty)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \times$$

$$\times \exp 2\gamma g_D(0,\infty) \prod_{k=1}^{n} \exp 2\sqrt{\gamma}\left(g_D(0,a_k) + g_D(a_k,\infty)\right) \prod_{k\neq p} \exp g_D(a_k, a_p) \Bigg] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \log \prod_{k=1}^{n} \left[ r\left(D_0^{(k)}, 0\right) r\left(D_{n+1}^{(k)}, \infty\right)\right]^{\frac{4\gamma}{n^2}} \frac{r\left(D_k^{(1)}, a_k^{(1)}\right) r\left(D_k^{(2)}, a_k^{(2)}\right)}{\left(\frac{2}{n}\right)^2 |a_k\, a_{k+1}|^{\frac{n}{2}-1}},$$

что дает неравенство

$$\left[r(D,0) r(D,\infty)\right]^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} r(D, a_k) \times$$

$$\times \exp 2\gamma g_D(0,\infty) \prod_{k=1}^{n} \exp 2\sqrt{\gamma}\left(g_D(0,a_k) + g_D(a_k,\infty)\right) \prod_{k\neq p} \exp g_D(a_k, a_p) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^n \left[ \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{|a_k\, a_{k+1}|^{\frac{n}{4}}} |a_k| \right] \times$$

$$\times\left(\prod_{k=1}^{n}\left[r\left(D_0^{(k)},0\right)\, r\left(D_{n+1}^{(k)},\infty\right)\right]^{\frac{4\gamma}{n^2}} r\left(D_k^{(1)},a_k^{(1)}\right)\, r\left(D_k^{(2)},a_k^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично доказательству теоремы 5.2.2 и с учетом условия доказуемой теоремы окончательно получаем

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n} r(D,a_k)\times$$

$$\times \exp 2\gamma g_D(0,\infty)\prod_{k=1}^{n}\exp 2\sqrt{\gamma}\left(g_D(0,a_k)+g_D(a_k,\infty)\right)\prod_{k\neq p}\exp g_D(a_k,a_p)\leqslant$$

$$\leqslant\left[r\left(D_0^{(0)},0\right)\, r\left(D_{n+1}^{(0)},\infty\right)\right]^{\gamma}\prod_{k=1}^{n} r\left(D_k^{(0)},a_k^{(0)}\right),$$

где $D_k^{(0)}$, $k=\overline{0,n+1}$, — круговые области, а $\{a_k^{(0)}\}_{k=1}^{n}\bigcup\{0,\infty\}$ — полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2=-\frac{\gamma w^{2n}+(n^2-2\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Причем равенство в неравенстве из теоремы 5.3.2 достигается, например, для открытого множества $D^{(0)}=\bigcup\limits_{k=0}^{n+1}D_k^{(0)}$ и системы точек $A_n^{(0)}=\{a_k^{(0)}\}_{k=1}^{n}\bigcup\{0,\infty\}$. Теорема доказана.

Для частного случая неналегающих областей некоторые подобные задачи рассмотрены в работе [220].

## 5.4 Некоторые дополнительные результаты для задач второго типа

Для задач второго типа со свободными полюсами на $n$-лучевых системах точек получены следующие результаты (А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина [55]).

**Теорема 5.4.1**. *Пусть даны числа* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ *и* $\gamma$, $0<\gamma\leqslant 0{,}4375$. *Тогда для любой* $n$*-лучевой системы точек* $A_n=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ *и* *любого набора взаимно непересекающихся областей* $B_k$*,* $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$*,* $k = \overline{1,n}$*, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0)\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)\cdot \frac{4^{n+\frac{\gamma}{n}}\gamma^{\frac{\gamma}{n}}n^n}{(n^2-\gamma)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда* $a_k$ *и* $B_k$*,* $k = \overline{1,n}$*, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\,dw^2,$$

*где* $R^n = \mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n)$*.*

***Доказательство.*** Совершим разделяющее преобразование заданных областей. Для задаваемой условиями теоремы 5.4.1 $n$-лучевой системы положим

$$E_k := E_k(A_n) := \{w \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \theta_k < \arg w < \theta_{k+1}(A_n)\}.$$

Рассмотрим функцию $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. При каждом $k = \overline{1,n}$ зафиксируем ту ветвь многозначной аналитической функции $\pi_k(w)$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение $E_k$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначает область плоскости $\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k\bigcap\overline{E}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, обозначаем область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1}\bigcap\overline{E}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$ , полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0\bigcap\overline{E}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Положим $\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$, $\pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}$.

Из определения функций $\pi_k$ вытекает, что

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_k|,$$

$$w \to a_k, \quad w \in \overline{E_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k}|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot |w - a_{k+1}|,$$

$$w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{E_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}},$$

$$w \to 0, \quad w \in \overline{E_k},$$

Тогда, как и при доказательстве предыдущих теорем, получаем

$$r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$k = \overline{1, n}, \quad \Omega_0^{(2)} := \Omega_n^{(2)}, \quad \omega_0^{(2)} := \omega_n^{(2)},$$

$$r\left(B_0, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует оценка для исследуемого функционала вида (5.1.17)

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\alpha_k \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{\left[\left|a_k a_{k+1}\right|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right]^{\frac{1}{2}}} = \prod_{k=1}^{n}\alpha_k \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Выражение, стоящее в скобках последней формулы, представляет собой произведение значений функционала $r^{\beta^2}(\Omega_k^{(0)},0)r(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)})r(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)})$ на тройках неналегающих областей $\left(\Omega_k^{(0)},\Omega_k^{(1)},\Omega_k^{(2)}\right)$ плоскости $\zeta$.

Перейдем далее к инвариантной форме этого функционала, что даем существенные преимущества. С учетом исследований работы [141] получаем

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{|\omega_k^{(1)}\cdot\omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}|\omega_k^{(1)}\cdot\omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \tag{5.4.1}$$

$$= 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{\gamma\alpha_k^2}{2}}\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)},0\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{|\omega_k^{(1)}\cdot\omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь использованы соотношения $|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)}-\omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$.

Функционал, стоящий в фигурных скобках выражения (5.4.1), инвариантен при любых конформных автоморфизмах $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда, обозначив через $G_k^{(s)}$ образ области $\Omega_k^{(s)}$ при дробно-линейном отображении $T_k(\zeta)$, $T_k(\omega_k^{(1)}) = -i$, $T_k(\omega_k^{(2)}) = i$, $T_k(0) = 0$, $k = \overline{1,n}$, $s = 0,1,2$, получаем, что

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \tag{5.4.2}$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \mathfrak{L}^{(\gamma)}(A_n) \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} \left\{ r^{\gamma \alpha_k^2} \left(G_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(G_k^{(1)}, -i\right) \cdot r\left(G_k^{(2)}, i\right)\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

В результате проведенных вычислений исходная задача сведена к оценке сверху функционала $r^{\beta^2}(B_0, 0) r(B_1, i) r(B_2, -i)$ на классе троек попарно непересекающихся областей $\{B_0, B_1, B-2\}$ таких, что $0 \in B_0$, $i \in B_1$, $-i \in B_2$, $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = 0, 1, 2$.

При доказательстве теоремы 4 в работе [109], с учетом результатов [141], доказано, что

$$r^{\beta^2}(B_0, 0) r(B_1, i) r(B_2, -i) \leqslant \Psi(\beta) =$$

$$= 2^{\beta^2+6} \cdot \beta^{\beta^2} (2-\beta)^{-\frac{1}{2}(2-\beta)^2} \cdot (2+\beta)^{-\frac{1}{2}(2+\beta)^2},$$

$\beta \in [0, 2]$. Нетрудно также показать, что функция $\ln \beta^2 \Psi(\beta)$ выпукла вверх на отрезке $(0, \sqrt{1,75})$, а функция $\Psi(\beta)$ — на отрезке $(0, \sqrt{0,8})$. Таким образом, отсюда вытекает неравенство

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{L}^{(\gamma)}(A_n) \cdot \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[\prod_{k=1}^{n} t_k^2 \Psi(t_k)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathfrak{L}^{(\gamma)}(A_n) \left[\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2 \Psi\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)\right]^{\frac{n}{2}}, \tag{5.4.3}$$

где

$$t_k = \sqrt{\gamma}\, \alpha_k, \quad 0 \leqslant t_k \leqslant \sqrt{1,75}. \tag{5.4.4}$$

Тогда при $\sqrt{\gamma} \leqslant \frac{\sqrt{1{,}75}}{2}$ неравенства (5.4.3) и (5.4.4) выполняются для всех $\alpha_k$, $k = \overline{1,n}$, и отсюда следует, что $0 < \gamma \leqslant 0,4375$.

Используя свойства разделяющего преобразования и результаты работы [109] получаем, что знак равенства в неравенстве (5.4.2) достигается, когда точки $a_k$ и области $B_k$, $k = \overline{1,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\alpha)w^n + R^n\alpha}{w^2(R^n - w^n)^2}\, dw^2,$$

где $R^n = \mathfrak{L}^{(\gamma)}(A_n)$. Теорема 5.4.1 доказана.

**Теорема 5.4.2**. *Пусть даны числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ и $\gamma$, $0 < \gamma \leqslant 0,2$. Тогда для произвольной $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ такой, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$, и любого набора попарно непересекающихся областей $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \sigma_k\right) \cdot \frac{2^n (4\gamma)^{\frac{\gamma}{n}} n^{2n}}{(n^2-\gamma)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{n-\sqrt{\gamma}}{n+\sqrt{\gamma}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

*Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда $a_k$ и $B_k$, $k = \overline{1,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

***Доказательство.*** Из неравенств (5.4.1) – (5.4.4) доказательства теоремы 5.4.1 следует соотношение

$$r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \mathfrak{L}^{(\gamma)}(A_n) \left[\prod_{k=1}^{n} \Psi(t_k)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \cdot \mathfrak{L}^{(\gamma)}(A_n) \left[\Psi\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)\right]^{\frac{n}{2}}, \tag{5.4.5}$$

где

$$t_k = \sqrt{\gamma}\,\alpha_k, \quad 0 \leqslant t_k \leqslant \sqrt{0,8}. \tag{5.4.6}$$

Отсюда, с учетом равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$, получаем, что (5.4.5) и (5.4.6) выполняются при $\gamma \leqslant \frac{0,8}{4} = 0,2$. Остальные утверждения теоремы 5.4.2 вытекают из свойств разделяющего преобразования. Теорема 5.4.2 доказана.

**Теорема 5.4.3**. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$. Тогда для любого $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $0 < \gamma \leqslant \frac{7}{16}n^2$, и всякой $n$-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mathcal{L}^{(\gamma)}(A_n) = 1$ и $\sigma_k \leqslant \sqrt{\frac{1,75}{\gamma}}$, $k = \overline{1,n}$, и любого набора взаимно непересекающихся областей $B_k$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0),$$

*где $a_k^0$ и $D_k$, $k = \overline{1,n}$, — соответственно, полюсы и круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\,dw^2.$$

***Доказательство.*** Из условий теоремы следует, что $0 < \gamma \leqslant \frac{n^2}{4} \cdot 1,75 = \frac{7}{16}n^2$ и $\sqrt{\gamma}\,\alpha_k \leqslant \sqrt{1,75}$, $k = \overline{1,n}$. Тогда справедливо неравенство (5.4.3). Очевидно также, что имеет место равенство

$$r^{\gamma}(D_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0) = \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)^2 \Psi\left(\frac{2\sqrt{\gamma}}{n}\right)\right]^{\frac{n}{2}}.$$

Отсюда получаем утверждения теоремы. Теорема 5.4.3 доказана.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксентьев Л.А., Майер Ф.Ф. Применение методов подчиненности и симметризации к достаточным признакам однолистности аналитических функций // Тр. сем. по краев. задачам Казанского гос. ун-та. – 1983. – № 19. – С. 14 – 28.

2. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 343 с.

3. Александров П.С., Ситников К.А. О непрерывных отображениях замкнутых множеств //Докл. АН СССР. – 1950. – **21**, №5. – С. 821 – 823.

4. Аленицын Ю.Е. Об однолистных функциях в многосвязных областях // Мат. сб. – 1956. – **39** (81), № 2. – С. 315 – 336.

5. Аленицын Ю.Е. Конформные отображения многосвязной области на многолистные канонические поверхности // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1964. – **28**, № 3. – С. 607 – 644.

6. Аленицын Ю.Е. Конформные отображения многосвязной области на многолистные поверхности с прямолинейными разрезами // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1965. – **29**, № 4. – С. 887 – 902.

7. Аленицын Ю.Е. Об однолистных функциях без общих значений в многосвязной области // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1967. – **94**. – С. 4 – 18.

8. Аленицын Ю.Е., Кузьмина Г.В., Лебедев Н.А. Методы и результаты геометрической теории функций. Добавление к книге Г.М. Голузина "Геометрическая теория функций комплексного переменного". – М.: Наука, 1966. – С. 532 – 626.

9. Альфорс Л., Берс Л. Пространство римановых поверхностей и квазиконформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 177 с.

10. Андреев В.А. Экстремальные задачи для одного класса регулярных и ограниченных в круге функций // Докл. АН СССР. Серия мат. – 1976. – **228**, № 4. – С. 769 – 771.

11. Антонюк Г.К. О некоторых применениях круговой симметризации // Науч. тр. Кубанск. гос. ун-та. – 1976. – № 217. – С. 3 – 8.

12. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. В 2-х т. – М.: Наука, 1982. – Т. 1. – 304 с.; – Т. 2. – 336 с.

13. Бабенко К.И. К теории экстремальных задач для однолистных функций класса $S$. – М.: Наука, 1972. – 319 с.

14. Базилевич И.Е. О теоремах искажения и коэффициентах однолистных функций // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 1. – С. 147 – 164.

15. Базилевич И.Е. О теоремах искажения в теории однолистных функций // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 2. – С. 283 – 292.

16. Базилевич И.Е. Обобщение одной интегральной формулы для подкласса однолистных функций // Мат. сб. – 1964. – **64**, № 4. – С. 628 – 630.

17. Базилевич И.Е. Об ортогональных системах функций, связанных с решениями уравнения Левнера // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1983. – **125**. – С. 24 – 36.

18. Бахтин А.К. О некоторых свойствах коэффициентов однолистных функций // Теория функций и ее приложения: Сб. науч. трудов. – Киев: Наук. Думка, 1979. – С. 3 – 8.

19. Бахтин А.К. О коэффициентах однолистных функций // Вопросы теории аппроксимации функций: Сб. науч. трудов. – Киев: Наук. Думка, 1980. – С. 3 – 14.

20. Бахтин А.К. О коэффициентах функций класса $S$ // Докл. АН СССР. Серия мат. – 1980. – **254**, № 5. – С. 1033 – 1035.

21. Бахтин А.К. Некоторые свойства функций класса $S$ // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 2. – С. 154 – 159.

22. Бахтин А.К. Функции класса Гельфера и их коэффициенты // Геометрическая теория функций и топология : Сб. науч. трудов. – Киев: Наук. Думка, 1981. – С. 3 – 8.

23. Бахтин А.К. О коэффициентах однолистных функций класса Гельфера // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 6. – С. 683 – 689.

24. Бахтин А.К. Некоторые экстремальные задачи для многосвязных областей // Вопросы анализа и приближения : Сб. науч. трудов. – Киев: Наук. Думка, 1989. – С. 19 – 23.

25. Бахтин А.К. Экстремальные задачи конформного отображения многосвязных областей // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа : Сб. науч. трудов. – Киев: Наук. Думка, 1990. – С. 12 – 17.

26. Бахтин А.К. Об одной экстремальной задаче // Комплексный анализ и теория потенциала : Сб. науч. трудов. – Киев: Наук. Думка, 1992. – С. 12 – 18.

27. Бахтин А.К. Об $n$-ых диаметрах континуумов // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1561 – 1563.

28. Бахтин А.К. О произведении внутренних радиусов симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1454 – 1464.

29. Бахтин А.К. Некоторые задачи в теории неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 6. – С. 723 – 731.

30. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Доп. НАН України. – 2004. – № 8. – С. 7 – 15.

31. Бахтин А.К. Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами на лучах // Доп. НАН України. – 2004. – № 12. – С. 7 – 13.

32. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучевых системах // Комплексний аналіз і течії з вільними границями : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1**, № 3. – С. 235 – 243.

33. Бахтин А.К. Экстремальные задачи со свободными полюсами на окружности // Доп. НАН України. – 2005. – № 5. – С. 7 – 10.

34. Бахтин А.К. Оценки функционалов для открытых множеств // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. – С. 147 – 153.

35. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на двух окружностях // Доп. НАН України. – 2005. – № 7. – С. 12 – 16.

36. Бахтин А.К. Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами // Докл. РАН. – 2005. – **405**, № 2. – С. 151 – 153.

37. Бахтин А.К. Разделяющее преобразование и неравенства в задачах о неналегающих областях // Проблеми аналізу і алгебри : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – **2**, № 3. – С. 9 – 17.

38. Бахтин А.К. Приведенные модули открытых множеств и экстремальные задачи со свободными полюсами // Доп. НАН України. – 2006. – № 5. – С. 7 – 13.

39. Бахтин А.К. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 867 – 886.

40. Бахтин А.К. О некоторых экстремальных задачах геометрической теории функций комплексного переменного // Доп. НАН України. – 2006. – № 9. – С. 7 – 11.

41. Бахтин А.К. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. – 2006. – № 10. – С. 7– 13.

42. Бахтин А.К.Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы в геометрической теории функций комплексного переменного: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 2007. – 294 с.

43. Бахтин А.К. Экстремумы линейных функционалов. – Киев, 1986. – 8 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 86.25).

44. Бахтин А.К. О некоторых задачах в теории неналегающих областей // Int. Conf. Complex Analysis and Potential Theory : Abstrs. – Kiev: Inst. Math. NAS Ukraine. – 2001. – P. 64.

45. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях // О некоторых задачах и теории однолистных функций. – Киев, 1980. – С. 11 – 15. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.31).

46. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Конформные отображения на взаимно–неналегающие области // Конференция "Комплексный анализ и приложения", БНР. – Варна, 1985. – С. 3 – 4.

47. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Разделяющие преобразования и неналегающие области // Комплексный анализ и теория потенциала. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 19 – 22.

48. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. О произведении степеней конформных радиусов симметричных неналегающих областей. – Киев, 1995. – С. 1 – 6. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 95.13).

49. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Некоторые экстремальные задачи для неналегающих областей. – Киев, 1995. – С. 9 – 13. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 95.14).

50. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Об экстремальных задачах для симметричных неналегающих областей // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 179 – 185.

51. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Некоторые задачи для "частично" неналегающих областей // International Conference dedicated to M.A. Lavrentyev on the occasion of his birthday centenary : Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2000. – С. 71.

52. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы // Доп. НАН України. – 2005. – № 8. – С. 13 – 15.

53. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Экстремальные задачи о неналегающих областях // Материалы Международной конференции "Комплексный анализ и его приложения". – Краснодар; Москва: Краснодар. гос. ун-т, Мат. ин-т РАН, 2005. – С. 16 – 17.

54. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Экстремальные задачи о неналегающих областях и квадратичные дифференциалы // International workshop on free boundary flows and related problems of analysis : Abstracts. 25 – 30 September. – Kiev, 2005. – С. 47 – 48.

55. Бахтин А.К., Бахтина Г.П. Разделяющие преобразования и задачи о неналегающих областях // Зб. праць Iн-ту математики НАН України. – Київ: Iн-т математики НАН України, 2006. – С. 273 – 284.

56. Бахтин А.К., Вьюн В.Е. Разделяющее преобразование и неравенства для открытых множеств // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 7 – 11.

57. Бахтин А.К., Вьюн В.Е., Трохимчук Ю.Ю. Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 7 – 10.

58. Бахтин А.К., Вьюн В.Е. Применение разделяющего преобразования к оценкам внутренних радиусов открытых множеств // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 10. – С. 1314 – 1322.

59. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах // Доп. НАН України. – 2004. – № 7. – С. 7 – 13.

60. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Экстремальные задачи и квадратичные дифференциалы // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 3. – С. 298 – 303.

61. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи на классе неналегающих областей // Зб. праць Iн-ту математики НАН України. – Київ: Iн-т математики НАН України, 2004. – **1**, № 3. – С. 244 – 253.

62. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи теории конформных отображений // Экстремальные задачи теории однолистных функций. – Киев, 2002. – С. 10 – 14. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2002.6).

63. Бахтин А.К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах // Некоторые экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами. – Киев, 2003. – С. 46 – 67. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 2003.6).

64. Бахтин А. К., Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи теории неналегающих областей со свободными полюсами на лучах // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 12. – С. 1715 – 1719.

65. Бахтина Г.П. Об одной экстремальной задаче конформного отображения единичного круга на неналегающие области // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 5. – С. 646 – 648.

66. Бахтина Г.П. Метод граничных вариаций в задачах о неналегающих областях // Analytic Functions : Intern. conf. (Cracow, Poland, September 4 – 11, 1974). – С. 65 – 66.

67. Бахтина Г.П. Об экстремизации некоторых функционалов в задаче о неналегающих областях // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 2. – С. 202 – 204.

68. Бахтина Г.П. Метод граничных вариаций в задачах о неналегающих областях. – Киев, 1975. – 35 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 75.2).

69. Бахтина Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.

70. Бахтина Г.П. Об одном применении вариационной формулы Шиффера–Дюрена // Вопросы математики. Сб.науч. трудов. Ташкент : Ташкент. гос. ун-т., 1976. – № 510. – С. 13.

71. Бахтина Г.П. Метод граничных вариаций в задачах о неналегающих областях // Ann. pol. math. – 1976. – v. 2, **33**, № 1 – 2. – С. 21.

72. Бахтина Г.П. О функциях без общих значений и вариационной формуле Шиффера–Дюрена // Вопросы математики. Сб.науч. трудов. Ташкент : Ташкент. гос. ун-т., 1976. – № 510. – С. 98 – 99.

73. Бахтина Г.П. Экстремальные свойства неналегающих областей //Analytic Functions : Intern. conf. (Kozubnik, Poland, April 18 – 26, 1979). – С. 2 – 3.

74. Бахтина Г.П. Экстремумы коэффициентов однолистных функций без общих значений // Геометрическая теория функций и топология : Сб.науч. трудов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 9 – 15.

75. Бахтина Г.П. Метод условных вариаций и коэффициенты однолистных функций. – Киев, 1983. – 13 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.27).

76. Бахтина Г.П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 21 – 27.

77. Бахтина Г.П. Свободные полюсы квадратичных дифференциалов и неналегающие области // Вопросы анализа и приближения. – Киев: Наук. Думка, 1989. – С. 23 – 27.

78. Бахтина Г.П. Однолистные функции и неналегающие области // Республиканское совещание-семинар по комплексному анализу и прикладным задачам управления : Тез. (Алушта, 27 сент. – 4 окт., 1989). – С. 7.

79. Бахтина Г.П. О задачах для неналегающих областей // International Conference on Complex analysis and Potential Theory : Abstracts. – Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2001. – С. 65.

80. Бахтина Г.П. Квадратичные дифференциалы и вариационные методы в теории конформного отображения // Материалы Международной конференции "Течения со свободными границами и прикладные вопросы анализа". – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2005. – С. 274 – 275.

81. Бондарь А. В. О непрерывных и открытых отображениях топологических пространств // Метрические вопр. теории функций и отображений. – Киев: Наук. Думка, 1971. – Вып. 3. – С. 31 – 39.

82. Бондарь А.В. Множества моногенности и критерии голоморфности для функций многих комплексных переменных //Десятая математическая школа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 361 – 381.

83. Бондарь А.В. Об условиях гомеоморфности голоморфных отображений с особенностями // Теория функций и топология. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 7 – 12.

84. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мухамадаев Э, Обуховский В.В. О вращении многозначных векторных полей // Докл. АН СССР. – 1969. – **187**, № 5. – С. 971 – 973.

85. Васильев А.Ю. Множество значений $\{f(r_1), f(r_2)\}$ в классе однолистных функций с вещественными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 1986. – **27**, № 6. – С. 28 – 32.

86. Васильев А.Ю. Вариационные методы и изопериметрические теоремы покрытия для однолистных функций // Изв. высших уч. завед. Математика. – 1988. – **1**. – С. 14 – 18.

87. Васильев А.Ю. Гармонические свойства модуля семейств кривых и инвариантные метрики на пространствах Тейхмюллера // Докл. РАН. – 1995. – **341**, № 5. – С. 583 – 584.

88. Гаврилюк М.Н. О некоторых классах функций, регулярных в круге // Теория отображений, ее обобщения и приложения. – Киев: Наук. Думка, 1982. – С. 61 – 64.

89. Гаврилюк М.Н. Теоремы покрытия и искажения для функций почти ограниченных в круге и кольце // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 5. – С. 74 – 76.

90. Ганинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. – М.: Мир, 1969. – 396 с.

91. Гельфер С.А. О классе регулярных функций, не принимающих ни одной пары значений $w$ // Мат. сб. – 1946. – **19**, № 1. – С. 33 – 46.

92. Голузин Г.М. Некоторые теоремы покрытия в теории аналитических функций // Мат. сб. – 1948. – **22**, № 3. – С. 353 – 372.

93. Голузин Г.М. Метод вариаций в конформном отображении. I, II, III, IV // Мат. сб. – 1946. – **19** (61), № 2. – С. 203 – 236; 1947. – **21** (63), № 1. – С. 83 – 117; № 2. – С. 119 – 132; 1951. – **29** (71), № 2. – С. 455 – 468.

94. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

95. Горяйнов В.В. О сходимости однопараметрических семейств аналитических функций // Вопросы метрической теории отображений и ее применение.– Киев: Наук. Думка, 1978. – С. 13 – 24.

96. Горяйнов В.В. Теорема искажения в классе ограниченных однолистных симметричных функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980.– № 8 – С. 11 – 14.

97. Горяйнов В.В., Гутлянский В.Я. К геометрическим свойствам конформного отображения // Метрические вопросы теории функций и отображений.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. – т. 6. – С. 24 – 40.

98. Гриншпан А.З. Коэффициентные неравенства для конформных отображений с гомеоморфным продолжением // Сиб. мат. журн. – 1985. – **26**, № 1 – С. 49 – 65.

99. Громова Л.Л. Некоторые приложения принципа площадей // Вест. Ленинград. гос. ун-та. – 1968. – № 7. – С. 31 – 40.

100. Громова Л.Л., Лебедев Н.А. О неналегающих областях, лежащих в круге. II //Вест. Ленинград. гос. ун-та, – 1973. – № 1. – С. 25 – 36.

101. Гутлянский В.Я. Параметрическое представление однолистных функций // Докл. АН СССР. Серия мат. – 1970. – **194**, № 4. – С. 750 – 753.

102. Гутлянский В.Я., Рязанов В.И. К теории локального поведения квазиконформных отображений // Изв. РАН. – 1995. – **59**, № 3. – С. 31 – 58.

103. Гушкалова А.Г. Гипотеза Дюрена для двух функционалов // Материалы 3 Петрозаводской междунар. конфер. по теор. функций компл. перем. – Петрозаводск.: Изд-во ПетрГУ, 2006. – С. 16 – 18.

104. Дженкинс Дж.А. Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 256 с.

105. Дубинин В.Н. Об одном способе симметризации // Науч. тр. Кубанского гос. ун-та. – 1974. – № 180. – С. 50 – 64.

106. Дубинин В.Н. О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей // Вопросы метрической теории отображений и ее применение. – Киев: Наук. Думка, 1978. – С. 24 – 31.

107. Дубинин В.Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Мат. сб. – 1985. – **128**, № 1. – С. 110 – 123.

108. Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Владивосток, 1988. – 193 с.

109. Дубинин В.Н. Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.

110. Дубинин В.Н. Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49** (295), № 1. – С. 3 – 76.

111. Дубинин В.Н. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1997. – **237**. – С. 56 – 73.

112. Дубинин В.Н. Емкости конденсаторов в геометрической теории функций : Учебн. пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточ. ун-та, 2003. – 116 с.

113. Дубинин В.Н., Ким В.Ю. Усредняющее преобразование множеств и функций на римановых поверхностях // Изв. высших уч. завед. Математика – 2001. – № 5 (468) – С. 21 – 29.

114. Дубинин В.Н., Ковалев Л.В. Приведенный модуль комплексной сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1998. – **254**. – С. 76 – 94.

115. Дубинин В.Н., Эйрих Н.В. Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2004. – **314**. – С. 52 – 74.

116. Емельянов Е.Г. К задачам об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1986. – **154**. – С. 76 – 89.

117. Емельянов Е.Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 91 – 98.

118. Емельянов Е.Г. Конформно-инвариантные функционалы на римановой сфере // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 134 – 154.

119. Емельянов Е.Г. К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2002. – **286**. – С. 103 – 114.

120. Зелинский Ю.Б. Некоторые критерии гомеоморфизма при отображении областей евклидова пространства // Труды VIII летней математической школы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 194 – 211.

121. Зелінський Ю.Б. Про узагальнення принципу граничної відповідності // Доповіді АН УССР. Сер. А. – 1972. – № 8. – С. 872 – 876.

122. Зелинский Ю.Б. О критериях монотонности и проблеме Штейнгауза // Тирасп. симпоз. по общей топологии. – Кишинев: Штиннца, 1973. – С. 38 – 39.

123. Зелинский Ю.Б. О непрерывных отображениях областей обобщенных многообразий // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. Думка, 1973.– Вып. 4. – С. 79 – 91.

124. Зелинский Ю.Б. О критериях монотонности // Десятая математическая школа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 277 – 289.

125. Зелинский Ю.Б. Об отображениях областей комплекных многообразий // Conf. on analytic functions : Abstracts. – Cracow: Inst.math. PAN, 1974.– P. 68 – 69.

126. Зелинский Ю.Б. О некоторых проблемах Косинского // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 4. – С. 510 – 516.

127. Зелинский Ю.Б. Об отображениях областей комплекных многообразий // Ann.Pol.math. – 1976 – **33**, № 1 – 2. – P. 197.

128. Зелинский Ю.Б. Об исследовании квазивнутренних отображений методами локальной степени // Докл. АН СССР. – 1977. – **232**, № 5. – С. 997 – 999.

129. Зелинский Ю.Б. Применение локальной степени к изучению квазивнутренних отображений // Укр. мат. журн. – 1978. – **30**, № 3. – С. 299 – 308.

130. Зелинский Ю.Б., Атабаев М. О множествах моногенности липшицевых функций // Геометрическая теория функций и топология. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 29 – 37.

131. Зелинский Ю.Б., Атабаев М. О производных множествах липшицевых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 421 – 427.

132. Зелинский Ю.Б. Многозначные отображения в анализе.– Киев: Наук. Думка, 1993. – 264 с.

133. Зелинский Ю.Б. О кратности непрерывных отображений областей // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 554 – 558.

134. Игнатьев А., Рязанов В. Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417.

135. Ильина Л.П. Оценки коэффициентов однолистых функций в зависимости от второго коэффициента // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 3. – С. 351 – 357.

136. Келдыш М.В. Конформные отображения односвязных областей на канонические области // Успехи мат. наук. – 1939. – **6**. – С. 90 – 119.

137. Келдыш М.В. Избранные труды. Математика. – М.: Наука, 1985.

138. Ковалев Л.В. О трех непересекающихся областях // Дальневосточный мат. журн. – 2000. – **1**, № 1. – С. 3 – 7.

139. Ковалев Л.В. О внутренних радиусах симметричных неналегающих областей // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 82 – 87.

140. Колбина Л.И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении // Докл. АН СССР. Серия мат. – 1952. – **84**, № 5. – С. 865 – 868.

141. Колбина Л.И. Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестник Ленинград. ун-та. – 1955. – **5**. – С. 37 – 43.

142. Крушкаль С.Л. Квазиконформные отображения и римановы поверхности. – Новосибирск: Наука, 1975. – 196 с.

143. Крушкаль С.Л., Кюнау Р. Квазиконформные отображения – новые методы и приложения.– Новосибирск: Наука, 1984. – 216 с.

144. Кудрявцев Л.Д. О свойствах диференцируемых отображений областей евклидовых пространств // Мат. сб. – 1953. – **32** (74).

145. Кузьмина Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Л.: Наука, 1980. – 241 с.

146. Кузьмина Г.В. К задаче о произведении конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1980. – **100**. – С. 131 – 145.

147. Кузьмина Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1983. – **125**. – С. 99 – 113.

148. Кузьмина Г.В. К задаче об экстремальном разбиении $n$-связной области // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1990. – **185**. – С. 96 – 110.

149. Кузьмина Г.В. Методы геометрической теории функций. I, II // Алгебра и анализ. – 1997. – **9**, № 3. – С. 41 – 103; № 5. – С. 1 – 50.
150. Кузьмина Г.В. О связи различных задач об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 1998. – **254**. – С. 116 – 131.
151. Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2001. – **276**. – С. 253 – 275.
152. Кузьмина Г.В. Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы. II, III // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2002. – **286**. – С. 126 – 147; 2004. – **314**. – С. 124 – 141.
153. Кузьмина Г.В. Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – **302**. – С. 52 – 67.
154. Куратовский К. Топология : В 2-х т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1; М.: Мир, 1969. – Т. 2.
155. Куфарев П.П. К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей // Докл. АН СССР. – 1950. – **73**, № 5. – С. 881 – 884.
156. Куфарев П.П., Фалес А.Э. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Докл. АН СССР. Серия мат. – 1951. – **81**, № 6. – С. 995 – 998.
157. Куфарев П.П., Фалес А.Э. Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей // Уч. зап. Томского ун-та. – 1952. – **17**. – С. 25 – 35.
158. Лаврентьев М.А. К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.
159. Лаврентьев М.А., Шепелев В.М. О некоторых свойствах однолистных функций // Мат. сб. – 1937. – **2**, № 2. – С. 319 – 326.
160. Лебедев Н.А. К теории конформных преобразований круга на неналегающие области // Докл. АН СССР. Серия мат. – 1955. – **103**, № 4. – С. 553 – 555.

161. Лебедев Н.А. Об области значений одного функционала в задаче о неналегающих областях // Докл. АН СССР. Серия мат. – 1957. – **115**, № 6. – С. 1070 – 1073.

162. Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1975. – 336 с.

163. Лебедев Н.А. Методы и результаты теории однолистных функций // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1983. – **125**. – С. 5 – 22.

164. Лебедев Н.А., Милин И.М. О коэффициентов некоторых классов аналитических функций // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 2. – С. 359 – 400.

165. Левицкий Б.Е. Некоторые общие свойства преобразований типа симметризации // Науч. тр. Кубанского гос. ун-та. – 1974. – № 180. – С. 112 – 126.

166. Луференко В.П., Суворов Г.Д. О понятии тела простого конца в теории Каратеодори // Метр. вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наук. Думка, 1971. – С. 71 – 79.

167. Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах. – М., 1930.

168. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: В 2-х т. – М.: Наука, 1967. – Т. 1. – 365 с.; – Т. 2. – 625 с.

169. Милин И.М. Однолистные функции о ортонормальные системы. – М.: Наука, 1971. – 256 с.

170. Милин И.М. Об одной гипотезе для логарифмических коэффициентов однолистных функций // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1983. – **125**. – С. 135 – 144.

171. Милнор Д. Теория Морса. – М.: Мир, 1965. – 184 с.

172. Митюк И.П. Обобщенный приведенный модуль и некоторые его применения // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 2. – С. 110 – 119.

173. Митюк И.П. Принцип симметризации для многосвязных областей // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 2. – С. 268 – 270.

174. Митюк И.П. Принцип симметризации для кольца и некоторые его применения // Сиб. мат. журн. – 1965. – **6**, № 6. – С. 1282 – 1291.

175. Митюк И.П. Принцип симметризации для многосвязных областей и некоторые его применения // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 46 – 54.

176. Митюк И.П. Некоторые свойства функций, регулярных в многосвязной области // Докл. АН СССР. – 1965. – **164**, № 3. – С. 495 – 498.

177. Митюк И.П. Теоремы единственности при симметризации областей и конденсаторов // Некоторые вопр. соврем. теории функций. – Новосибирск, 1976. – С. 101 – 108.

178. Митюк И.П. Оценки внутреннего радиуса (емкости) некоторой области (конденсатора) // Изв. Северо-Кавказского науч. центра высш. школы. – 1983. – № 3. – С. 36 – 38.

179. Митюк И.П. Оценка сверху для произведения внутренних радиусов областей и теоремы покрытия // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 8. – С. 39 – 47.

180. Морс М. Топологические методы теории функций комплексного переменного. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 248 с.

181. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. – М.–Л.: ОГИЗ, 1941.

182. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. – М.: Гостехиздат, 1956.

183. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. – М.: Физматгиз, 1962.

184. Помельников Ю.В., Суворов Г.Д. Новое семейство конормоинвариантных метризуемых расширений плоской области // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 3. – С. 144 – 161.

185. Прохоров Д.В. О функциях класса И.Е. Базилевича // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1974. – **44**. – С. 127 – 130.

186. Прохоров Д.В. Методы оптимизации в экстремальных задачах для однолистных функций: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1990. – 310 с.

187. Прохоров Д.В. Сумма коэффициентов ограниченных однолистных функций // Мат. заметки – 1997. – **61**, № 5. – С. 728 – 733.

188. Прохоров Д.В., Рахманов Б.Н. Об интегральном представлении одного класса однолистных функций // Мат. заметки – 1976. – **19**, № 1 – С. 41 – 48.

189. Ревяков И.П. Некоторые теоремы покрытия для однолистных функций // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 7. – С. 85 – 92.

190. Роднянский А.М. О непрерывных дифференцируемых отображениях открытых множеств евклидова пространства // Мат. сб. – 1957. – **42** (84). – С. 179 – 195.

191. Роднянский А.М. О непрерывно дифференцируемых отображениях открытых множеств // Мат. сб. – 1955. – **36**, (78) № 2. – С. 233 – 262.

192. Роднянский А.М. О непрерывно дифференцируемых отображениях открытых множеств эвклидовых прстранств // Мат. сб. – 1957. – **42**, (84) № 2. – С. 179 – 195.

193. Романенко В.Ю. Об монотонности в гильбертовом пространстве. – Киев, 1989. – 40 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 89.56).

194. Рязанов В., Сребро У., Якубов Э. К теории BMO–квазирегулярных отображений // Докл. РАН. – 1999. – **369**, № 1. – С. 13 – 15.

195. Сирик В.И. Об асимптотической моногенности непрерывных отображений // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 87 – 92.

196. Ситников К.А. О непрерывных отображениях открытых множеств евклидова пространства // Мат. сб. – 1952. – **31** (73). – С. 439 – 458.

197. Солынин А.Ю. Непрерывная симметризация множеств // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1990. – **185**. – С. 125 – 139.

198. Солынин А.Ю. Модули двухсвязных областей и конформно-инвариантные метрики // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1991. – **196**. – С. 122 – 131.

199. Солынин А.Ю. Некоторые экстремальные задачи в классе $\Sigma(\tau)$ // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1991. – **185**. – С. 138 – 153.

200. Солынин А.Ю. Изопериметрические неравенства для многоугольников и диссимметризация // Алгебра и анализ. – 1992. – **4**, № 2. – С. 210 – 234.

201. Солынин А.Ю. Модули и экстремально–метрические проблемы // Алгебра и анализ. – 1999. – **11**, № 1. – С. 3 – 86.

202. Спеньер Э. Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971. – 680 с.

203. Старков В.В., Андреев В.В. Об однолистных функциях локально максимизирующих модули двух коэффициентов // Докл. АН СССР. – 1986. – **289**. – С. 804 – 805.

204. Старков В.В. Об ограниченных однолистных функциях реализирующих локальный максимум двух коэффициентов // Мат. весник – 1988. – **40**. – С. 327 – 335.

205. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. – М.: Мир, 1970.

206. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. – М., 1958.

207. Суворов Г.Д. Семейства плоских топологических отображений // Новосибирск: РИО СО АН СССР, 1965. – 266 с.

208. Суворов Г.Д. Обобщенный "принцип длины площади" в теории отображений. – Киев: Наук. Думка, 1985. – 280 с.

209. Суворов Г.Д., Иванов О.В. Полные решетки конформно-инвариантных компактификаций области. – Киев: Наук. Думка, 1982. – 196 с.

210. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного : В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 362 с.: – Т. 2. – 416 с.

211. Стоилов С. Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964. – 227 с.

212. Тамразов П.М. Теоремы покрытия линий при конформном отображении // Мат. сб. – 1965. – **66** (108), № 4. – С. 502 – 524.

213. Тамразов П.М. Некоторые экстремальные задачи теории однолистных конформных отображений // Мат. сб. – 1965. – **67** (109), № 3. – С. 329 – 337.

214. Тамразов П.М. К общей теореме о коэффициентах // Мат. сб. – 1967. – **72** (114), № 1. – С. 59 – 71.

215. Тамразов П.М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – **32**, № 5. – С. 1033 – 1043.

216. Тамразов П.М. Об изменении модулей при круговой симметризации // Мат. заметки. – 1971. – **10**, № 5. – С. 527 – 532.

217. Тамразов П.М. Конформно-инвариантные модули и круговая симметризация // Метрические вопр. теории функций и отображений. – Киев: Наук. Думка, 1974. – С. 127 – 146.

218. Тамразов П.М. Экстремальная задача А.А. Гончара о емкости конденсаторов // Докл. АН СССР. – 1980. – **250**, № 5. – С. 1066 – 1070.

219. Тамразов П.М. Емкости конденсаторов. Метод перемешивания зарядов // Мат. сб. – 1981. – **115**, № 1. – С. 40 – 73.

220. Таргонский А.Л. Оценки некоторых функционалов на на классах неналегающих областей // Комплексний аналіз і течії з вільними границями : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – **1**, № 3. – С. 235 – 243.

221. Таргонский А.Л. Некоторые экстремальные задачи на лучевых системах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. – **3**, № 4. – С. 465 – 473.

222. Трохимчук Ю.Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 212 с.

223. Трохимчук Ю.Ю. О непрерывных отображениях областей эвклидова пространства. // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 2. – С. 196 – 211.

224. Трохимчук Ю.Ю. О непрерывных отображениях плоских областей // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 1. – С. 89 – 94.

225. Трохимчук Ю.Ю. Об открытых нульмерных отображениях многообразий // Метрические вопр. теории функций и отображений. – Киев: Наук. Думка, 1969. – Вып. 1. – С. 209 – 221.

226. Трохимчук Ю.Ю., Бондарь А.В. О локальной степени нульмерного отображения // Метрические вопросы теории функций и отображений. – 1969. – Вып. 1.– С. 221 – 241.

227. Трохимчук Ю.Ю., Зелинский Ю.Б., Шарко В.В. О некоторых результатах в топологии многообразий, теории многозначных отображений и теории Морса // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1983. – **154**. – С. 222 – 230.

228. Федоров С.И. О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1981. – **112**. – С. 172 – 183.

229. Хейман В.К. Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

230. Цих А.К. Один случай распространения теоремы о разложении Фруассара и его применение к вычетам некоторых рациональных функций // Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных. – Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР, 1973. – С. 167 – 180.

231. Чеботарев Н.Г. Теория алгебраических функций. – М.–Л.: Гос. издат., 1948. – 396 с.

232. Чернавский А.В. О двухкратных непрерывных разбиениях шара // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 6. – С. 1272 – 1275.

233. Чернавский А.В. Невозможность строгого двухкратного непрерывного разбиения гомологического куба // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 2. – С. 286 – 289.

234. Чернавский А.В. Конечнократные открытые отображения многообразий // Мат. сб. – 1964. – **65**, (107) № 3. – С. 356 – 369.

235. Чернавский А.В. Дополнение к статье "О конечно-кратных открытых отображениях многообразий"// Мат. сб. – 1965. – **66** (108). – С. 471 – 472.

236. Черных Ю.В. Теорема единственности для симметризации интегральных средних функций Грина // Вопросы метрической теории отображений и ее применение.– Киев: Наук. Думка, 1978. – С. 142 – 146.

237. Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества. – М.: Наука, 1985. – 272 с.

238. Шеретов В.Г. Аналитические и геометрические свойства плоских отображений. – Тверь, 2006. – 328 с.

239. Шиффер М., Спенсер Д.К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 347 с.

240. Шлык В.А. О теореме единственности для симметризации произвольных конденсаторов // Сиб. мат. журн. – 1982. – **23**, № 2. – С. 165 – 175.

241. Шлык В.А. О нижней оценке расстояний между образами линий уровня в одном классе мероморфных отображений кольца // Дифф. и операторные уравнения в функц. пространствах. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1983. – С. 93 – 102.

242. Шлык В.А. Обобщенные четырехугольники, симметризация и неоднолистные отображения // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1986. – **154**. – С. 163 – 174.

243. Шлык В.А. Теоремы искажения и покрытия для одного класса регулярных функций в кольце // Вопросы прикладного анализа. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1986. – С. 106 – 112.

244. Эрве М. Функции многих комплексных переменных. – М.: Мир, 1965. – 166 с.

245. Южаков А.П. К теории вычетов функций двух комплексных переменных // Учен. зап. МОПИ. Математика. – 1960. – **60**, № 7. – С. 153 – 162.

246. Aharonov D., Kirwan W.E. A method of symmetrization and applications. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **163**, № 1. – P. 369 – 377; – **169**, № 7. – P. 279 – 291.

247. Ahlfors L.V. Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen // Acta. Soc. Sci. Fenn. – 1930. – № 9. – S. 1 – 40.

248. Ahlfors L.V., Berling A. Conformal invariants and functiontheoretic null-sets // Acta. Math. – 1950. – **83**, № 1 – 2. – P. 101 – 129.

249. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta. Math. – 1974. – **133**, № 3 – 4. – P. 138 – 169.

250. Barth K.F., Brannan D.A., Hayman W.K. Reseach problem in complex analysis // Bull. London Math. Soc. – 1984. – **16**. – P. 490 – 517.

251. Beck A., Lewin F., Lewin M. On compact one-to-one continuous image of the real line // Colloq. Math. – 1971. – **23**, № 2. – P. 251 – 256.

252. Bergweiler W. On the number of critical points in parabolic basins // Ergod. Th. and Dynam. Sis. – 2002. – **22**. – P. 655 – 669.

253. Bieberbach L. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln // S. B. preuss. Akad. Wiss. – 1916. – **138**. – P. 940 – 955.

254. Bieberbach L. Einführung in die konforme abbildung. – Berlin: Sammlung Göschen, Band 768/786a, 1967. – 184 p.

255. Bing R.H. The monotone mapping problem // Topology of Manifolds (Proc. Inst. Univ. of Georgia, Athens, Ga. 1969), Markham, Chicago. – 1970. – P. 99 – 115.

256. Bombieri E. On the local maximum property of the Koebe function // Invent. math. – 1967. – **4**, 1. – P. 26 – 67.

257. Borel A. Seminar on transformation groups. – Princeton University Press, 1960.

258. Bohr H. Uber streckentreue und konforme Abbildung // Math. Zeitschr. – 1918. – **1**, № 4. – S. 403 – 420.

259. Borsuk K., Molski R. On a class of continuous mappings // Fund. Math. – 1957. – **45**, № 1. – P. 84 – 98.

260. Bourgin D. G. A generalization of the mappings degree // Can. J. Math. – 1974. – **26**, № 5. – P. 1109 – 1117.

261. Browder F.E. On a generalization of the Schauder fixed point theorem // Duke Math. J. – 1959. – **26**, № 2.

262. Caratheodory C. Über die Begrenzug einfach zusammenhängender Gebiete // Math. Ann. – 1913. – **73**. – S. 323 – 370.

263. Church P.T. Differentiable open maps on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – **109**, № 1. – P. 87 – 100.

264. Church P.T. Differentiable Mars with Non–negative Jacobian //J. Math., Mech. – 1966. – **16**, № 7.

265. Church P.T. Differentiable monotone maps on manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **128**, № 2. – P. 185 – 205.

266. Church P.T. Differentiable monotone maps on manifolds //Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – **158**, № 2.

267. Church P.T., Hemmingsen E. Light open maps on $n$-manifolds // Duke Math. J. – 1960. – **27**, № 4. – P. 527 – 536.

268. Church P.T., Hemmingsen E. Light open maps on $n$-manifolds, III // Duke Math. J. – 1963. – **30**, № 3. – P. 379 – 390.

269. Church P.T., Timourian J.G. Differentiable maps with 0-dimensional critical set // Pacif. J. Math. – 1972. – **41**, № 3. – P. 615 – 630.

270. Civin P. Two-to-one mappings of manifolds // Duke Math. J. – 1949. – **10**. – P. 49 – 57.

271. De Branges L. A proof Bieberbach conjecture // Acta. Math. – 1985. – **154**. – P. 137 – 152.

272. Derrick W.R. A condition under which a mapping is a homeomorphism // Amer. Math. Mon. – 1973. – **80**, № 5. – P. 554 – 555.

273. Dieudonné J. Sur les fonctions univalentes. – C.R. Acad. Sci., Paris, 1931. – **192**. – P. 1148 – 1150.

274. Duda E. Mappings on spheres // Fund. Math. – 1964. – **55**. – P. 195 – 197.

275. Duda E., Haynsworth W. Hugh. Finite-to-one open mappings // Can. J. Math. – 1971. – **23**, № 1. – P. 77 – 83.

276. Duren P.L. Univalent functions. – N.Y. Springer–Verlag. , 1983. – 383 p.

277. Duren P.L. Arcs ommited by support points of Univalent functions // Comment. Math. Helveciti. – 1981. – **56**, № 3. – P. 352 – 365.

278. Duren P.L., Schiffer M. A variation method for function schlicht in annulus // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1962. – **9**. – P. 260 – 272.

279. Duren P.L., Schiffer M. Conformal mappings onto non-overlapping regions // Complex analysis. – Basel: Birkhauser Verlag, 1988. – P. 27 – 39.

280. Eke B.G. The asymptotic behaviour of areally mean valet functions // J. D'analyse Math. – 1967. – **20**. – P. 147 – 212.

281. Fitzgerald C.H. Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1972. – **46**, № 5. – P. 356 – 368.

282. Fitzgerald C.H. The Bieberbach conjecture: Retrospective // Notices Amer. Math. Soc. – 1985. – **32**, № 1. – P. 2 – 6.

283. Gilbert P.W. $n$-to-one mappings of linear graphs // Duke Math. J. – 1942. – **9**. – P. 475 – 486.

284. Ganszar A., Prokhorov D., Szynal J. A coefficient product estimate for bounded univalent functions // Ann. Univers. M. Curie–Skłodowska, Lublin–Polonia. Sec. A. – 2000. – **3**. – P. 27 – 44.

285. Goh S.S. On the two-functional conjecture for univalent functions // Compl. Var. – 1992. – **20**. – P. 197 – 206.

286. Grauert H., Remmert R. Komplexe Räume // Math. Ann. – 1958. – **136**, № 2. – S. 245 – 318.

287. Gromova L. Fourth coefficient estimate in the class of univalent functions and quasiconformal extensions // Sci. Ser. A: Math. Sci. – 2003. – **3**. – P. 27 – 31. (Valparaiso, Chile).

288. Gronwall T.H. Some remarks on conformal representation // Ann. of Math. – 1914. – **2**, № 16. – P. 72 – 76.

289. Grötzsch H. Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. – 1928. – **80**, № 6. – P. 367 – 376, 497 – 502.

290. Grötzsch H. Über ein Variationsprobleme der konformen Abbildung // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. – 1930. – **82**, № 4. – P. 251 – 263.

291. Grunsky H. Koeffizientenbedingungen for schlicht abbildende meromorphe Funltionen // Math. Z. – 1939. – **45**, № 1. – P. 29 – 61.

292. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. On boundary correspondence under quasiconformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1996. – **21**. – P. 167 – 178.

293. Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Ryazanov V.I., Vuorinen M. On convergence theorems for space quasiregular mappings // Forum Math. – 1998. – **10**. – P. 353 – 375.

294. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. On the asymptotic behavior of quasiconformal mapping in space // Quasiconformal Mappings and Analysis. – New York: Springer. – 1998. – P. 159 – 180.

295. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. On local injectivity and asymptotic linearity of quasiregular mappings // Studia Math. – 1998. – **128**, № 3. – P. 243 – 271.

296. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I., Martio O., Vuorinen M. Infinitesimal geometry of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2000. – **25**, № 1. – P. 101 – 130.

297. Hammel I.A. Variational method for Gel'fer functions // J. Anal. Math. – 1976. – **30**. – P. 272 – 280.

298. Harrold O.G. Exacty $(k, 1)$ transformation on connected linear graphs // Amer. J. of Math. – 1940. – **62**, № 4. – P. 823 – 834.

299. Hayman W.K. Values and growth of functions regular in the unit disk // Lecture notes Math. – 1976. – **599**. – P. 68 – 75.

300. Hayman W.K., Nicholls P.J. On the minimum modulus of functions with given coefficients // Bull. London Math. Soc. – 1973. – **5**. – P. 295 – 301.

301. Honkapohja M. Degree and point-inverses of mappings on sphere // Suomalais tiedeakat. toimituks. Ser. A1. – 1969. – № 44.

302. Jakubowski Z.J., Prokhorov D., Szynal J. Proof of a coefficient product conjecture for bounded univalent functions // Complex Variables. – 2000. – **42**. – P. 241 – 258.

303. Jenkins J.A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization // Ann. Math. – 1955. – **61**, № 1. – P. 106 – 115.

304. Jenkins J.A. Some uniqueness results in the theory of symmetrization II // Ibid. – 1962. – **75**, № 2. – P. 223 – 230.

305. Kiang, Tsai-han. Remarks on two-leaved orientable covering manifolds of closed manifolds // Ann. of Math. – 1943. – **44**, № 2. – P. 128 – 130.

306. Kirwan W.E., Pell R. Extremal properties of a class of slit conformal mappings // Michigan Math. J. – 1978. – **25**. – P. 223 – 232.

307. Koebe P. Über die unformisierung beliebiger analitischen kurven // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. – 1907. – **1**, № 2. – P. 191 – 210.

308. Koebe P. Abhandlungen zur theorie der konforme abbildung, IV // Acta math. – 1918. – **41**. – P. 305 – 344.

309. Kosinski A. On a problem of Steinhaus // Fund. Math. – 1958. – **46**, № 1. – P. 47 – 59.

310. Lacher R.C. Cell-line mappings // Pacif. J. Math. – 1970. – **35**, № 3. – P. 649 – 660.

311. Lewandowski Z., Libera R., Zlotkiewich E. Values assumed by Gel'fer function // Ann. UMCS A. – 1979. – **31**. – P. 75 – 84.

312. Lewandowski Z., Starkov V. On meromorphic and univalent functions yielding local maxima of two coefficients // Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej Folia Scientiarum Universitatis Technicae Resoviensis. – 1990. – **73**. – P. 9 – 17.

313. Looman H. Uber die Cauchy - Riemanschen Differentialgleichungen // Nachr. Ges. Wiess. Göttingen. – 1923. – S. 97 – 108.

314. Löwner K. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildung des Einheits kreises. 1 // Math. Ann. – 1989. – P. 103 – 121.

315. Martineau A. Indicatrices des fonctions analytiques et invertion de la transformation de Laplace // C.R. Acad. Sci. – 1962. – **255**, № 22. – P. 2888 – 2890.

316. Martinelli E. Contributi alla teoria dei residui per le funsioni di due variabili complesse // Ann. mat. pura ed appl. – 1955. – **39**, № 4. – P. 335 – 345.

317. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On $Q$-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2005. – **30**. – P. 49 – 69.

318. Michalska M., Prokhorov D., Szynal J. The compositions of hyperbolic triangle mappings // Complex Variables. – 2000. – **43**. – P. 179 – 186.

319. Mioduszewsuki F. On two-to-one continuous functions // Rozpr.mat. – 1961. – **24**. – 43 p.

320. Nehari Z. Some inequalities in the theory of functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – **75**, № 2. – P. 256 – 286.

321. Pfluger A. Über die koeffizienten schlichter funktionen // Bonn Math. Schr. – 1980. – **121**. – P. 41 – 61.

322. Poincare H. Sur les résidus des integrales doubles // C. R. Acad. Sci. – 1886. – **102**. – P. 202 – 204.

323. Pólya G. Sur la symétrisation circulaire // C.R. Acad. Sci., Paris. – 1950. – **230**. – P. 25 – 27.

324. Pommerenke Ch. Relations between the coefficients of a univalent function // Invent. Math – 1967. – **3**, № 1. – P. 1 – 15.

325. Prokhorov D. Methods of optimization in coefficient estimates for bounded univalent functions // Ann. univ. M. Curie–Skłodowska. Sec. A. – 1994. – **48**. – P. 106 – 119.

326. Prokhorov D. Coefficients of functions close to the identity function // Complex Variables. – 1997. – **33**. – P. 255 – 263.

327. Prokhorov D. Radii of neighborhoods for coefficient estimates of functions close to the identity // Comput. Methods and Func. Theory. – 1999. – P. 449 – 459.

328. Prokhorov D., Szynal J. Directional convexity of level lines for functions convex in a given direction // Proc. Amer. Math. Soc. – 2002. – **131**, № 5. – P. 1453 – 1457.

329. Rabinowitz P.H. A note on topological degree theory for holomorphic maps. – Aarhur univers.: Preprint series, october, 1972/73. – №16.

330. Rado T., Reichelderfer P.T. Continuous transformations in analysis. – Berlin: Springer–Verlag, 1955.

331. Reich E., Schiffer M. Estimates for the transfinite diameter of a continuum // Math. Z. – 1964. – **85**. – P. 91 – 106.

332. Riemann B. Theorie der Abelschen Functionen // Borchardt's Journ. für reine und angewandte Math. – 1867. – **54**. – S. 81 – 135.

333. Roberts J.H. Two-to-one transformations // Duke. Math. J. – 1940. – **6**, № 1. – P. 256 – 262.

334. Rogosinski W.W. Über positive harmonische Sinusentwicklungen // Jber. deutsch. Math. Ver. – 1931. – **40**, № 2. – P. 33 – 35.

335. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. BMO-quasiconformal mappings // J. d'Anal. Math. – 2001. – **83**. – P. 1 – 20.

336. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Degenerate Beltrami equation and radial $Q$-homeomorphisms // Reports of Dept. Math. Univ. Helsinki. – 2003. – **369**. – P. 1 – 34.

337. Ryazanov V., Sevostyanov E. On normal families of $Q$-homeomorphisms // Proc. of Inst. Appl. Math. and Mech. – 2004. – **9**. – P. 161 – 176.

338. Schaeffer A.C., Spencer D.C. Coefficient regions for schlicht functions. – New York: Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1950. – **35**. – 311 p.

339. Schiffer M. A method of variation within the family of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 432 – 449.

340. Schiffer M. On the coefficients of simple functions // Proc. Lond. Math. Soc. – 1938. – **44**. – P. 450 – 452.

341. Schiffer M. Variation of the Green functions and the theory of $p$-valent functions // Amer. J. Math. – 1943. – **65**, № 2. – P. 341 – 360.

342. Shiga Hiroo. On spaces with a map $CP^n \to M$ of degree one // Proc. Japan. Acad. – 1976. – **52**, № 1. – P. 4 – 6.

343. Sikorski R. Some applications of interior mappings // Fund. math. – 1958. – **45**. – P. 200 – 212.

344. Stankiewicz J., Stankiewicz Z. On the mappings of the unit disk onto disjoining domains // Материалы 3-й Петрозаводской международной конференции по теории функций комплексного переменного, посвященной 100–летию Г.М. Голузина. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2006. – С. 36.

345. Starkov V. Univalent functions that are local extrema of two real functionals // PLISKA Studia Math. Bulgaria. – 1989. – **10**. – P. 16 – 26.

346. Szego G. Jahresber // Dtsch. Math. Ver. – 1922. – Bd. 31. – S. 42. (Autgabe 2)

347. Teichmuller O. Collected papers. – Berlin ect.: Springer – 1982.

348. Tsuji M. Potential theory in modern function theory. – Tokyo, 1959. – 590 p.

349. Väisäla J. Discrete open mappings on manifolds // Ann. Acad. Scient. Fennicae. Series A.I. Mathematica. – 1966. – **392**. – 28 p.

350. Vasil'ev A. Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings. // Lect. notes in math. – 2002. – **1788**. – 211 p.

351. Venable M., Roberts J.H. Two-to-one transformations on 2-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1941. – **49**, № 1. – P. 1 – 17.

352. Weyl H. Die Idee der Riemanschen Fläche. – Stuttgard: Springer, 1955. – 162 s.

353. Whyburn G.T. Analytic topology. – Amer. Math.Soc.Col. Publications, 1942. – **28**.

354. Wilder R.L. Topology of manifolds. – Amer. Math. Soc. Coll. Publications, 1949. – **32**.

*Наукове видання*

Бахтін Олександр Костянтинович
Бахтіна Галина Петрівна
Зелінський Юрій Борисович

# ТОПОЛОГО-АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ МЕТОДИ В КОМПЛЕКСНОМУ АНАЛІЗІ

(*російською мовою*)

Редактор В. Е. Гонтковська

---

Підп. до друку 05.05.2008. Формат 60x84/16. Папір офс. Офс. друк. Фіз. друк. арк. 19,3. Ум. друк. арк. 18,0. Зам. № 80. Тираж 300 пр.

---

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3